

連分数展開を用いた準周期時系列からの回転数推定

市瀬 夏洋 *

Estimation of Rotation Numbers From Quasiperiodic Time Series Using Continued Fraction Expansion

Natsuhiro Ichinose*

概要

回転数は円上の写像による準周期解における重要な不変量である。この論文では、準周期時系列から、位相情報を用いることなしに、回転数を推定する手法を提案する。準周期解の不変閉曲線が、位相を取得することが困難であるような複雑な形状となっても、本手法によって回転数を推定することができる。回転数を連分数展開によって表すことにより、連分数を有限で切り捨てた有理数 (コンバージェント) によって回転数を推定する。コンバージェントは、時系列データから直接観測が可能なデータ間の距離を用いて、最近傍の2つの距離のみから推定されることを示す。本手法を連続時間のリミットサイクルの周期推定に応用する。サンプリング周期がリミットサイクルの周期よりも長い場合でも、本手法によって周期が推定可能であることを示す。

1 はじめに

回転数は円上の写像による準周期解における重要な不変量である。この論文では、写像の詳細な情報を用いずかつ位相 (あるいは角度変数) を直接観測することなしに、回転数を推定する方法を提案する。回転数を推定するために多くの手法が提案されている [1, 2, 3, 4]。しかしながら、ほとんどの手法において写像の情報や円上の位相を用いることが仮定されている。従って、他の手法に比べ、本手法は位相を観測することが困難である場合に有効である。

回転数は写像の一反復に対する平均位相差に相当する。散逸力学系において、準周期解は円にトポロジ的に等価な吸引的不変閉曲線として発生する [5]。不変閉曲線上に位相を定義することができる時、回転数は不変量として決定することができる。しかしながら、不変閉曲線を時系列から再構成する時、位相を定義することが困難な場合がある。不変閉曲線はフラクタル次元が1である。埋め込み定理によれば、1次元のアトラクタを再構成

* 京都女子大学データサイエンス学部データサイエンス学科 ichinosen@kyoto-wu.ac.jp

する場合、一般に 3 次元の空間を必要とする [6, 7]。他方、位相を定義する時、不変閉曲線は 2 次元平面に存在する、あるいは射影される必要がある。もし 1 次元のアトラクタを 2 次元で再構成する時、埋め込みが成立せずに曲線上に交点や尖点が発生する場合がある [7]。この時、位相を同定することはできない。

本研究の主要なアイデアは、位相差を再構成されたアトラクタ上の距離によって代替することである。回転数は連分数展開を用いて表現される [8]。位相差と写像回数を用いて回転数の連分数展開を同定することができる。もし不変閉曲線が十分に円に近い時、位相差と距離との関係は単調である。この場合、位相を推定することなしに、3 次元空間でも測定することが容易な距離を用いることによって回転数を推定することができる。

しかしながら、位相差と距離の関係は常に単調とは限らず、不変閉曲線の形状に依存する。スパイラル構造を持つ不変閉曲線は関係が非単調となる例である。Double covering 分岐によって発生した不変閉曲線は、その始点と終点が接続したスパイラル構造を持つ [9]。平行に位置する近傍のスパイラル上の 2 点は円上の位相としては離れているが、距離としては近傍である。近傍のスパイラルは同じ方向を持つため、アトラクタの広い領域で位相差と距離の不一致が発生する。

位相差と距離の不一致を回復するために、微小な距離のみを用いた連分数展開の構成法を提案する。近傍のスパイラル間の距離はその構造によって制限される。従って、スパイラル間以下の距離のみを用いる時、位相差と距離は単調となり、不変閉曲線の形状によらず回転数を推定することができる。

時系列解析への有効性を示すために、本手法を長いサンプリング周期で観測されたりリミットサイクルに応用する。リミットサイクルの周期と独立にサンプリング周期を設定する場合、一般に両方の周期は互いに不整 (周期の比が無理数) となる。この時、観測された時系列は準周期的であるとみなすことができる [10]。もしリミットサイクルの周期において 1 点か 2 点のサンプリング点しか存在しない場合、その連続な時系列の全容を観測することは一般に困難である。回転数を推定することによって、リミットサイクルの周期を推定することが可能である。さらに観測された時系列全体から、連続な時系列を推定することが可能となる。

2 節では、回転数と連分数の定義を示し、連分数展開によって回転数を推定する方法を示す。3 節では、本論文の主結果である距離からの回転数の推定法を示す。4 節では、アルゴリズムの詳細を示す。5 節では、回転数推定法の数値結果を示す。

2 回転数と連分数展開

2.1 回転数

f を円 $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の方向保存写像であるとし ($f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$)、次のように軌道を生成する：

$$\theta_n = f(\theta_{n-1}), \quad (1)$$

ここで n は離散時間、 θ_n は位相変数 ($\theta_n \in \mathbb{S}^1$) である。 $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を f のリフトとする。 F に対して次の条件が成り立つ： $F(\theta+1) = F(\theta) + 1$ かつ $f(\theta) = F(\theta) \pmod{1}$ である。リフトは実数 $\mathbb{R}$ において定義されるため、 $\mathbb{S}^1$ における f よりも解析が容易である。リフトされた軌道を次のように定義する：

$$\Theta_n = F(\Theta_{n-1}), \quad (2)$$

ここで $\Theta_n \in \mathbb{R}$ であり $\theta_n = \Theta_n \pmod{1}$ である。

回転数 ω は次のように定義される：

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Theta_n - \Theta_0}{n}. \quad (3)$$

ポアンカレは極限 ω は Θ_0 に依存せずに決定されることを証明した。 ω が無理数である時、軌道は準周期的である。無理数 ω を持つ f は次のような無理数回転と位相共役であることが証明されている [11, 12]：

$$\theta_n = r_\omega(\theta_{n-1}) = \theta_{n-1} + \omega \pmod{1}. \quad (4)$$

これは $f \cdot h = h \cdot r_\omega$ であるようなユニークな共役写像 $h: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ が存在することを意味する。

2.2 連分数とコンバージョン

実数を表現するために、二進展開や β 展開など、いくつかの展開方法がある。これらの展開の中で、連分数展開はそれが無理数に対するベストな有理数近似を与えるという意味で有益である。本手法の大半は Khinchin による連分数に対する結果に依存している [8]。

回転数 ω を次のように (無限) 連分数によって表現する：

$$\omega = [a_1, a_2, a_3, \dots] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{\ddots}}}},$$

ここで $a_1, a_2, a_3, \dots$ は自然数である。通常、連分数は整数部分 (a_0 で表記) を有する。定義により $0 \leq \omega < 1$ であるため、整数部分は省略している。ここで連分数展開を k 個の有限の項で打ち切ることを考える。この時、有限連分数は有理数である。有理数を p_k/q_k とす

ると、有限連分数は次のように表される：

$$\frac{p_k}{q_k} = [a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_k}}}}. \quad (6)$$

有理数 p_k/q_k は ω の k 番目のコンバージェントと呼ばれる。それぞれのコンバージェントは次のように $k \geq 2$ に対して再帰的に決定することができる：

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad (7)$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad (8)$$

ここで、 $p_0/q_0 = 0/1$ かつ $p_1/q_1 = 1/a_1$ である。

もし $a/b \neq p/q$ かつ $0 < b \leq q$ である次の不等式が成り立つ時、有理数 p/q は ω の最適近似であると定義される：

$$|b\omega - a| > |q\omega - p|. \quad (9)$$

すべての ω の最適近似はコンバージェントであることが証明されている (Theorem 16 in [8])。[8] において、これは「第 2 種の」最適近似と呼ばれる。第 1 種の最適近似は ω と有理数との差 $|\omega - p/q|$ を扱う。第 1 種の最適近似は第 2 種に比べより直感的である。しかしながら、第 1 種の最適近似とは対照的に、コンバージェントであることと第 2 種の最適近似であることは必要十分であるため ($\omega = 1/2$ を除く、Theorem 17 in [8])、第 2 種の最適近似は重要である。言い換えると、式 (9) が成立する p/q を網羅することによってコンバージェントを網羅することができる。この連分数とコンバージェントの特性を回転数を推定するために用いる。

2.3 連分数による回転数の推定

回転数を連分数によって近似するためのいくつかの方法が提案されている。たとえば [2] においては、写像のトポロジカルな挙動 (写像によって生じる位相の区間) を用いて連分数を構成している。しかしながら、本研究では時系列からの回転数の推定を目的としているため、写像のトポロジカルな情報を用いない。そこで、距離への拡張を考慮して、位相差のみから連分数を構成することを試す。

初期値 θ_0 と時刻 n における位相 θ_n との位相差は次のように定義する：

$$D(\theta_0, \theta_n) = \min(|\theta_n - \theta_0|, 1 - |\theta_n - \theta_0|). \quad (10)$$

無理数回転 (式 (4)) の軌道における点間の位相差を考える。無理数回転のリフトは次のように表される：

$$\Theta_n = \Theta_{n-1} + \omega = \Theta_0 + n\omega. \quad (11)$$

位相差はリフトされた変数 Θ_n を用いて次のように表される：

$$D(\theta_0, \theta_n) = \min_p |\Theta_n - \Theta_0 - p|, \quad (12)$$

ここで $\Theta_0 = \theta_0$ であり p は正の整数である。式 (11) より、 $\Theta_n - \Theta_0 = n\omega$ であり位相差は次のように書き換えられる：

$$D(\theta_0, \theta_n) = \min_p |n\omega - p|. \quad (13)$$

従って、無理数回転の位相差は最適近似の定義 (式 (9)) に直接的に対応する。式 (9) より、次の式を満足するすべての q によって、データサイズ以下のすべての最適近似の分母を取得することができる：

$$D(\theta_0, \theta_n) > D(\theta_0, \theta_q) \quad \text{for all } 0 < n < q. \quad (14)$$

言い換えると、 θ_q は時刻 q 以前の位相よりも θ_0 に対して小さな位相差を持つ位相である。最適近似はコンバージェントに等しいため、これはすべてのコンバージェントの分母を取得することを意味する。

コンバージェントの分子は無理数回転の位相差 (式 (12)) の最小値を与える p に等しい。しかしながら、実際の位相差の計算には式 (10) が用いられるため、分子 p を直接決定することはできない。そこで、分母の系列から連分数を再構成する。取得された分母を昇順に $q_1, q_2, \dots, q_K$ とする、ただし $q_0 = 1$ とする。式 (8) より、分母の列を用いて連分数のパラメータ a_k は次のように決定される ($k \geq 2$)：

$$a_k = \frac{q_k - q_{k-2}}{q_{k-1}}. \quad (15)$$

$k < 2$ に対して、 $a_1 = q_1$ である。 a_k の系列および式 (7) を用いて、コンバージェントの分子 p_k は再帰的に決定される。結果として、最大分母を持つコンバージェント p_K/q_K を ω の推定値 $\hat{\omega}$ として同定する。

上記の議論は無理数回転に対するものである。しかしながら、共役写像 h が連続であることを仮定すれば、写像 f の軌道においても無理数回転の位相差の順序は保存される。従って、回転数は一般の写像 f においても同様の手続きで推定することができる。

回転数と推定値の誤差は次のように与えられる [8]：

$$\left| \omega - \frac{p_K}{q_K} \right| < \frac{1}{q_K^2}. \quad (16)$$

観測したデータサイズが N である時、 $q_K \leq N$ である。従って誤差のオーダーは $O(N^{-2})$ 程度である。

2.4 回転の方向と回転数の制限

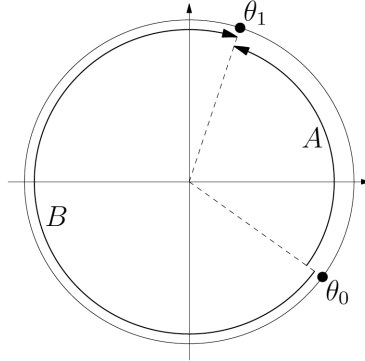


図1 回転方向と回転数。無理数回転において、回転が反時計回りであるとき、回転数は A であり、時計回りである時、回転数は $B(=1 - A)$ である。

回転数が A および $B(=1 - A)$ である無理数回転を考える。図1に示すように、それぞれの回転の方向が異なる場合、両写像は同じ挙動を有する。従って、回転の方向が未知である時、回転数 A および B を区別することはできない。位相差の定義 (式 (10)) から、位相差は $1/2$ 以下である ($D(\theta_n, \theta_0) < 1/2$)。従って、図1の場合は、回転数 A が選ばれる。

回転数が $1/2$ 以上である場合、 $p_1/q_1 = 1/1$ がコンバージェントとなる。この時、連分数の第一パラメータは $a_1 = 1$ である。しかしながら、式 (14) から、可能な分母 q は 1 以上であるため、 a_1 は 1 以上に制限される ($a_1 = q_1 > 1$)。結果として、前節のアルゴリズムでは推定される回転数は $1/2$ 以下となる ($\omega < 1/2$)。これは写像のトポロジカルな情報を用いないことによる制限である。もし事前に回転数が $1/2$ 以上であることがわかっているならば、回転数の推定値は $\hat{\omega} = 1 - p_k/q_k$ である。また、 $q_0 = 1$ かつ $q_1 > 1$ であるため、式 (8) より q_k は k に対して単調増加である：

$$q_k < q_{k+1} \quad (k \geq 0). \quad (17)$$

3 距離による回転数の推定

3.1 位相差と距離の関係

前節では円上の写像 f の回転数に対する推定法を示した。しかしながら、2次元以上の空間における不変閉曲線では常に位相を定義できるとは限らない。そこで、位相差と不変閉曲線上の点間の距離との関係を議論する。不変閉曲線上の時刻 n における状態を $\mathbf{x}_n$ とする。 $\mathbf{x}_n$ はベクトルであり、2以上の次元を有する。1次元の時系列しか得られない場合は遅延座標系を用いてベクトルを得る [6, 7]。初期値 $\mathbf{x}_0$ と時刻 n における状態 $\mathbf{x}_n$ との距離は次のように定義する：

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\|_2^2, \quad (18)$$

ここで $\|\cdot\|_2$ はユークリッド距離である。ユークリッド距離の二乗を用いているので、厳密には距離ではない。しかしながら、ここでは距離の比較のみが必要であるため d の機能的な問題はない。平方ユークリッド距離を用いている理由は 3.4 節において説明する。

不変閉曲線が単位円に等しい場合を考える。この時、位相 θ_n に対して不変閉曲線上の点 $\mathbf{x}_n$ は次のように表される：

$$\mathbf{x}_n = (\cos(2\pi\theta_n), \sin(2\pi\theta_n)). \quad (19)$$

この時、距離は次のように表される：

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) = (\cos(2\pi\theta_n) - \cos(2\pi\theta_0))^2 + (\sin(2\pi\theta_n) - \sin(2\pi\theta_0))^2 \quad (20)$$

$$= 2 - 2 \cos(2\pi(\theta_n - \theta_0)) \quad (21)$$

$$= 2 - 2 \cos(2\pi D(\theta_0, \theta_n)). \quad (22)$$

式 (22) は、 $\cos(2\pi D) = \cos(-2\pi D)$ かつ $\cos(2\pi D) = \cos(2\pi(1 - D))$ であるため成り立つ。位相差 D と距離 d は単調増加の関係にあるため (ただし $D \leq 1/2$)、式 (14) の D を d に置き換えても前節のアルゴリズムは成立する。従って、不変閉曲線が円に十分等しい場合は、位相差のかわりに距離を用いることができる。

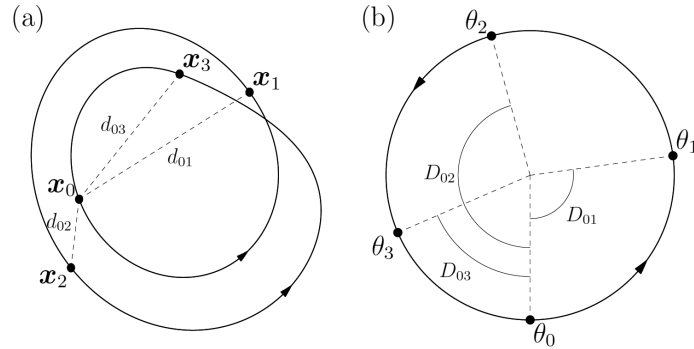


図2 位相差と距離の不一致。(a) スパイラル構造を持つ不変閉曲線。 d_{01}, d_{02} , および d_{03} はそれぞれ初期値 $\mathbf{x}_0$ から状態 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ への距離である、ここで $d_{02} < d_{03} < d_{01}$ 。(b) 不変閉曲線に位相共役な無理数回転。 D_{01}, D_{02} , および D_{03} はそれぞれ初期値 θ_0 と位相 θ_1, θ_2 , および θ_3 への位相差である、ここで $D_{03} < D_{01} < D_{02}$ 。

しかしながら、不変閉曲線が複雑な構造を持つ場合、位相差と距離は一致しない。図 2(a) に示されるスパイラル構造を持つ不変閉曲線はその例である。不変閉曲線は交点を持つが、3次元空間では解消される。初期値 $\mathbf{x}_0$ から写像された状態 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, および $\mathbf{x}_3$ が示されている。 $\mathbf{x}_0$ からのそれぞれの状態の距離 ($d_{0n} = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n)$ で記述) は次のような順序を持つ： $d_{02} < d_{03} < d_{01}$ 。他方、図 2(b) は不変閉曲線に対して位相共役な無理数回転である。初期値 θ_0 からそれぞれの位相への位相差 ($D_{0n} = D(\theta_0, \theta_n)$ で記述) は次のような順序を持つ： $D_{03} < D_{01} < D_{02}$ 。従って位相差によって評価した場合、 θ_1 および θ_3 がコンバージェントに対応する。

しかしながら、距離によって評価した場合、 $d_{02} < d_{01}$ であるため、誤ったコンバージェント (x_2) を検出してしまう。 x_3 は本来コンバージェントに対応するにも関わらず、 x_2 が x_0 に平行するスパイラルに位置するために ($d_{02} < d_{03}$)、 x_3 はコンバージェントから除去されてしまう。従って、位相差を距離に置き換えるだけでは回転数を推定することができない。

3.2 距離からのコンバージェントの再構成

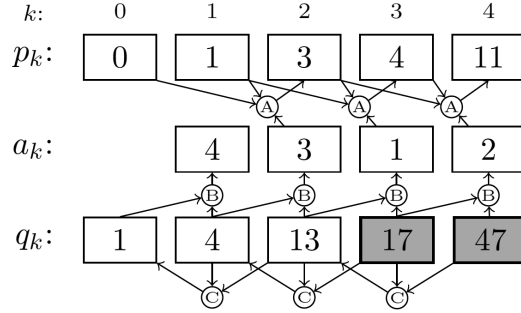


図3 コンバージェントの再構成の例。灰色のノードが与えられた2つの最大分母に対応する。他のすべてのノードはこれらのノードから再構成される。A, B, および C はそれぞれ式 (7), (27), および (29) に対応する過程である。推定された回転数は $\hat{\omega} = p_4/q_4 = 11/47$ である。

図 2(a) の不変閉曲線を位相に変換することは困難である。平面上の角度を位相とする時、ある位相に対して不変閉曲線上の 2 点に対応するためである。距離によって回転数を推定するために、前節のアルゴリズムを改良する。

問題は不変閉曲線の構造に起因する偽のコンバージェント (たとえば、図 2(a) の x_2) が検出されてしまうことである。 s を偽のコンバージェントの最大の分母であるとする。この時、次の q は $q > s$ である時、正しいコンバージェントの分母である：

$$d(x_0, x_n) > d(x_0, x_q) \text{ for all } 0 < n < q. \quad (23)$$

式 (23) で得られた分母の系列を $q_1, q_2, \dots, q_L$ とする (ただし $q_0 = 1$)。偽のコンバージェントの分母 s は未知である。しかしながら、ここで q_L および q_{L-1} は正しいコンバージェントの分母であると仮定する ($L-1 > s$)。式 (23) より、より大きな q_{L-1} に対して距離 $d(x_0, x_{q_{L-1}})$ はより小さい。偽のコンバージェントの x_s の距離 $d(x_0, x_s)$ は不変閉曲線の構造によって下限を持つ。従って、時系列の長さが十分大きい時、 q_L および q_{L-1} は正しいコンバージェントの分母であることが期待できる。

式 (8) より、コンバージェントにおける近傍の分母の比 q_k/q_{k-1} は次のような特性を有する (Theorem 6 in [8])：

$$\frac{q_k}{q_{k-1}} = a_k + \frac{1}{q_{k-1}/q_{k-2}} \quad (24)$$

$$= a_k + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{q_{k-1}/q_{k-3}}} \quad (25)$$

$$= a_k + [a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1]. \quad (26)$$

連分数の部分 $([\cdot])$ は 1 以下であるため、次のように比 q_k / q_{k-1} から連分数のパラメータ a_k が求められる：

$$a_k = \left\lfloor \frac{q_k}{q_{k-1}} \right\rfloor, \quad (27)$$

ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ はフロア関数 (整数部分) である。従って、式 (8) より、 q_{k-1} 以下の系列は次式によって再帰的に導出される：

$$q_{k-2} = q_k - \left\lfloor \frac{q_k}{q_{k-1}} \right\rfloor q_{k-1} \quad (28)$$

$$= q_k \bmod q_{k-1}, \quad (29)$$

ここで $\bmod$ はモジュラス演算子であり、商の余りを表す。

式 (29) および q_L および q_{L-1} のペアを用いて、すべてのコンバージェントの分母を再構成することができる。しかしながら、式 (14) によって構成された分母の系列の長さ K と L は必ずしも一致しない。偽のコンバージェントの影響によって、コンバージェントの数は未知である。そこで $\hat{q}_1 = q_L$ および $\hat{q}_2 = q_{L-1}$ として、式 (29) を次のように書き換える ($k \geq 3$)：

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{k-2} \bmod \hat{q}_{k-1}. \quad (30)$$

この時、 q_k は単調増加かつ $\hat{q}_{K+1} = q_0 = 1$ であるため、 $\hat{q}_k = 1$ によって再帰の終了を判定することができる。導出の過程で式 (27) によって a_k の系列を再構成することができるため、2.3 節と同様に回転数を推定することができる。言い換えると、図 3 に示されるように、回転数の推定値の情報は、コンバージェントの 2 つの最大の分母 q_L および q_{L-1} に集約されている。

3.3 周期解

前述の手法は時系列が準周期的であることを想定している。しかしながら、本手法は周期解に対しても適用することが可能である。周期解である場合、回転数 ω は有理数である。従って、コンバージェントの数は時系列の長さによらず有限でなければならない。

周期解が周期 P を持つ時、次の式が成り立つ：

$$d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_P) = d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{mP}) = 0, \quad (31)$$

ここで $m \geq 2$ は整数である。 P はコンバージェントの最大の分母に等しいため、 mP はコンバージェントの分母ではない。式 (23) の不等式は等号を持たないため、原理的には mP は分母として選ばれない。しかしながら、数値計算の誤差やノイズのために、 $d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_P) > d(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_{mP})$ によって、 mP が選ばれてしまうことがある。

式 (8) より、

$$mq_{k-1} \neq q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad (32)$$

が成り立つ。そこで、式 (23) によって得られた分母の系列 $q_1, q_2, \dots, q_L$ のなかで、 $q_k = mq_{k-1}$ ($m \geq 2$) を満足する q_k ($k \geq 2$) を削除する。この手続きにより、 mP は排除されるため、周期解の回転数の推定が可能である。しかしながら、 $P = 1$ (固定点) の場合は mP を削除することはできない。従って、事前に固定点であることをチェックする必要がある。

3.4 ノイズの影響

実験により準周期的時系列を得る場合、ノイズの影響が避けられない。簡単のために、1次元の時系列 ($x_n = x_n$) を考える。真の時系列を $\hat{x}_n$ とする。観測時系列 x_n は次のように観測ノイズを含む：

$$x_n = \hat{x}_n + \epsilon_n, \quad (33)$$

ここで ϵ_n は $E(\epsilon_n) = 0$ かつ $E(\epsilon_n^2) = \sigma^2$ である i.i.d. の正規分布に従うと仮定する。初期値との距離は次のように表される：

$$d(x_0, x_n) = (\hat{x}_n - \hat{x}_0 + \epsilon_n - \epsilon_0)^2. \quad (34)$$

従って、距離の順序は観測ノイズに影響され得るため、コンバージェントの分母の導出が困難となる。そこで、距離の期待値を考える：

$$E(d(x_0, x_n)) = E((\hat{x}_n - \hat{x}_0)^2) + E((\epsilon_n - \epsilon_0)^2) \quad (35)$$

$$= E(d(\hat{x}_0, \hat{x}_n)) + 2\sigma^2, \quad (36)$$

ここで以下がなりたつため式 (35) は成り立つ：

$$E(2(\hat{x}_n - \hat{x}_0)(\epsilon_n - \epsilon_0)) = 2E(\hat{x}_n - \hat{x}_0)E(\epsilon_n - \epsilon_0) = 0. \quad (37)$$

期待値を用いることによって、観測ノイズの分散がバイアスとして残る。しかしながら、バイアスは n によらず一定であるため距離の順序は保存される。従って、期待値の効果を得るために、初期値からの距離の代りに、次のように距離の平均を用いる：

$$d_n = \frac{1}{N-M} \sum_{i=0}^{N-M-1} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+n}), \quad (38)$$

ここで N は時系列の長さ、 M は最大の時間差 ($n \leq M$) である。 M はコンバージェントの最大分母 q_K を制限し、 M が大きいほど推定誤差は小さい。他方、 M が小さいほど期待値の効果は高い。従って、ノイズ低減と推定精度はトレードオフの関係にある。

もし距離としてユークリッド距離を用いる場合、観測ノイズの項はルート関数の中に含まれる。この場合、距離を平均しても期待値の効果が直接得られない。従って、我々はユークリッド距離ではなく、その2乗を用いている。

実際の力学系では観測ノイズの他にダイナミカルノイズが存在する。ダイナミカルノイズ存在下での準周期解はガウシアンランダムウォークモデルと等価となる [13]。ランダムウォークモデルは非定常過程であり、誤差の分散は時間に対して増加する。従って、大きな n であるほど、距離 d_n はノイズに影響を受ける。観測ノイズの場合、ノイズが距離に与えるバイアスは n によらず一定であるが、ダイナミカルノイズの場合、バイアスは n に依存する。ダイナミカルノイズ存在下での回転数の推定は今後の課題である。

4 アルゴリズム

回転数を推定するためのアルゴリズムをまとめる。入力は3次元ベクトルの時系列 $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$ であり、最大時間差 $M < N$ がパラメータである。1次元の時系列 x_n のみが得られている場合、遅延座標系によって $\mathbf{x}_n$ を構成する：

$$\mathbf{x}_n = (x_n, x_{n+\tau}, x_{n+2\tau}), \quad (39)$$

ここで τ はラグである。

最初に、Algorithm 1 に示すように、与えられた時系列から距離の系列を得る。

Algorithm 1 距離の系列の計算

Require: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N-1}$ and $M < N$

1: **for** $n = 1, 2, \dots, M$ **do**

2: $d_n = \frac{1}{N-M} \sum_{i=0}^{N-M-1} \|\mathbf{x}_{i+n} - \mathbf{x}_i\|_2^2$

3: **return** $d_1, d_2, \dots, d_M$

以下のアルゴリズムは準周期解および2かそれ以上の周期を持つ周期解のみに対応する。従って事前に与えられた時系列が固定点であるかをチェックする。もし時系列が固定点である場合、推定された回転数は $\omega=0$ である。

Algorithm 2 によって、距離の系列からコンバージェントの最大および次点の分母を得る。 q_k の定義は式 (23) であり、line 3 に対応する。しかしながら、3.3 節で示したように、周期解に対応するために line 4 の条件が付加されている。

Algorithm 2 コンバージェントの最大および次点の分母の検出

Require: $d_1, d_2, \dots, d_M$

```
1:  $k = 0$  and  $q_0 = 1$ 
2: for  $i = 2, \dots, M$  do
3:   if  $d_i < d_{q_k}$  then
4:     if  $k = 0$  or  $i \bmod q_k \neq 0$  then
5:        $k \leftarrow k + 1$ 
6:        $q_k = i$ 
7:  $L = k$ 
8: return  $q_L$  and  $q_{L-1}$ 
```

Algorithm 3 によって、最大および次点の分母から連分数のパラメータ a_k を導出する。系列 a_k からコンバージェントの分子を導出し、最大分母のコンバージェントを回転数の推定値 $\hat{\omega}$ として出力する。本アルゴリズムでは回転数の推定値は $\hat{\omega} < 1/2$ に制限される。もし事前に $\omega \leq 1/2$ であることが既知であれば、回転数の推定値は $1 - \hat{\omega}$ である。

Algorithm 3 回転数の推定

Require: q_L and q_{L-1}

```
1:  $k = 2$ ,  $\hat{q}_1 = q_L$  and  $\hat{q}_2 = q_{L-1}$ 
2:  $\hat{a}_1 = \lfloor \hat{q}_1 / \hat{q}_2 \rfloor$ 
3: while  $\hat{q}_k \neq 1$  do
4:    $k \leftarrow k + 1$ 
5:    $\hat{q}_k = \hat{q}_{k-2} \bmod \hat{q}_{k-1}$ 
6:    $\hat{a}_{k-1} = \lfloor \hat{q}_{k-1} / \hat{q}_k \rfloor$ 
7:  $K = k - 1$ 
8:  $[a_1, a_2, \dots, a_K] = [\hat{a}_K, \hat{a}_{K-1}, \dots, \hat{a}_1]$ 
9:  $p_0 = 0$  and  $p_1 = 1$ 
10: for  $k = 2, \dots, K$  do
11:    $p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}$ 
12: return  $\hat{\omega} = p_K / q_L$ 
```

5 結果

5.1 サークルマップの回転数推定における誤差およびノイズの影響

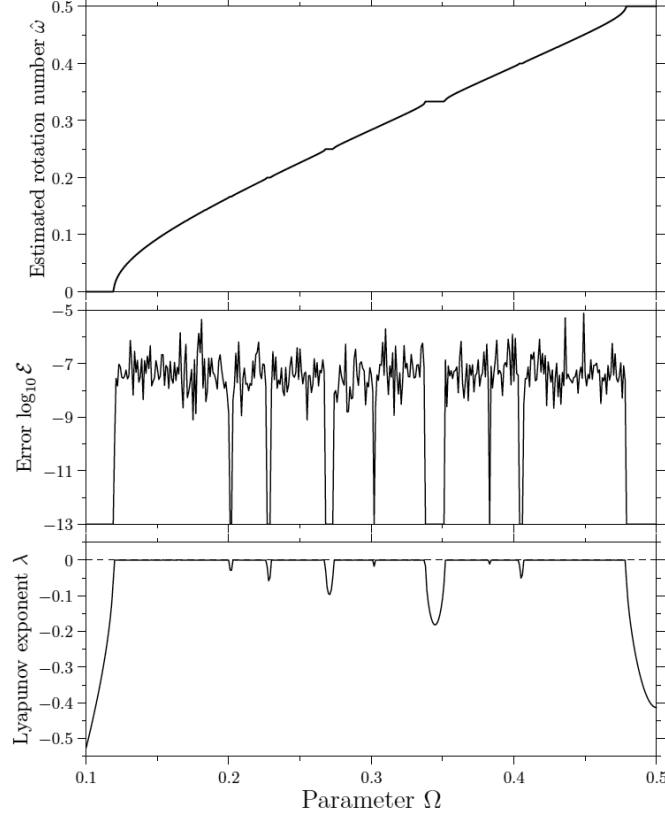


図4 パラメータ Ω に対するサークルマップの回転数の推定。推定回転数、真値に対する誤差、およびサークルマップのリアプノフ指数が示されている。データサイズは $N=10000$ および最大時間差は $M=5000$ である。パラメータ J は $J=0.75$ に固定している。

サークルマップの回転数を推定することによって、誤差およびノイズの影響を評価する。サークルマップは次のように定義される [5, 14]：

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \Omega - \frac{J}{2\pi} \sin(2\pi\theta_{n-1}) \pmod{1}. \quad (40)$$

時系列を次のように構成する ($n=1, 2, \dots, N$)：

$$\mathbf{x}_n = (\cos(2\pi\theta_n), \cos(2\pi\theta_{n+1}), \cos(2\pi\theta_{n+2})). \quad (41)$$

初期値 $\theta_0=0$ を用いている。

図4にサークルマップの推定回転数を示す。可能な推定回転数は $1/2$ 以下であるため、 Ω の範囲を $0 \leq \Omega \leq 1/2$ としている。真値に対する誤差およびリアプノフ指数も示している。推定値 $\hat{\omega}$ の真値 ω に対する誤差は次のように $\mathcal{E}$ とする：

$$\mathcal{E} = |\omega - \hat{\omega}|. \quad (42)$$

真値 ω は [1] の Algorithm 3.1 を用いて決定している。このアルゴリズムは回転数の定義 (式 (3)) を元に行っている。すなわち、式 (40) を直接用いて、有限の n において回転数を近似し、近似値のゆらぎがある精度以下になるまで n を増加させる。ここでは精度 10^{-13} を用いている。サークルマップのリアプノフ指数は次のように定義される：

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log |1 - J \cos(2\pi\theta_{n-1})|. \quad (43)$$

$\lambda < 0$ である時、時系列は周期解、および $\lambda = 0$ である時、時系列は準周期解である。

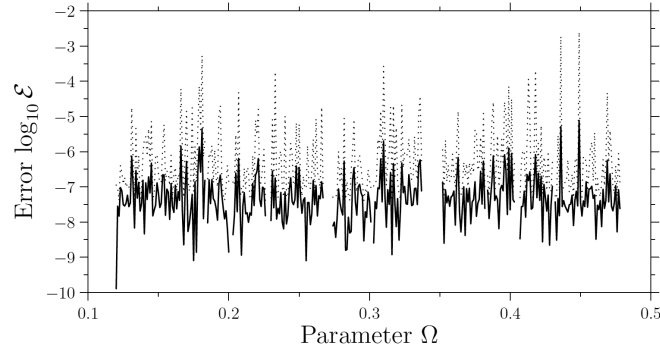


図5 準周期解における誤差の上限。直線は準周期解 (図4における $|\lambda| < 2 \times 10^{-4}$ の領域) における誤差 $\mathcal{E}$ を示す。点線はコンバージェントの最大分母 p_L から導出された誤差の上限 $\mathcal{E}^u$ を示す。パラメータは $N = 10000$, $M = 5000$, および $J = 0.75$ に固定されている。

図4において、周期解の回転数は有理数であるため、周期解を与える Ω (すなわち、 $\lambda < 0$) に対して誤差は低くなっている。準周期解において推定回転数はおおむね $\log_{10} \mathcal{E} \approx -7$ 程度の誤差を持つ。コンバージェントによる近似の理論誤差 (式 (16)) から、検出された最大分母によって決定される誤差の上限を $\mathcal{E}^u$ とする：

$$\mathcal{E} < \mathcal{E}^u = \frac{1}{q_L^2}. \quad (44)$$

最大時間差 M に対して $p_L \leq M$ である。従って、誤差の上限はおおむね $\log_{10} \mathcal{E}^u \approx -\log_{10} M^2 \approx -7.34$ ($M = 5000$) であり図4の誤差を説明する。図5において、準周期解における誤差 $\mathcal{E}$ と誤差の上限 $\mathcal{E}^u$ を比較している。誤差とその上限はほぼ相関している。すべての誤差は $\mathcal{E}^u$ 以下であることを確認している。従って、本手法で推定された回転数は推定に用いた p_L によってその誤差が評価できる。

観測ノイズ存在下での回転数の推定を考える。観測ノイズを含む時系列は次のように表される：

$$\mathbf{x}_n = (\cos(2\pi\theta_n) + \epsilon_n, \cos(2\pi\theta_{n+1}) + \epsilon_{n+1}, \cos(2\pi\theta_{n+2}) + \epsilon_{n+2}), \quad (45)$$

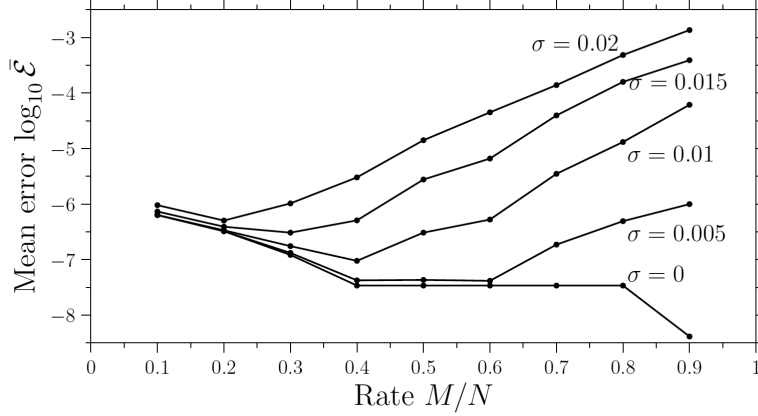


図6 観測ノイズ存在下での推定回転数の平均誤差。ノイズの標準偏差 $\sigma = 0, 0.005, 0.01, 0.015,$ および 0.02 に対する平均誤差が示されている。各平均誤差は 1000 試行に対して計算される。パラメータ Ω は $\omega \approx 1 - 1/\phi$ (ϕ は黄金比) となるように $\Omega = 0.3891$ に固定されている。他のパラメータは $N = 10000$ および $J = 0.75$ に固定されている。

ここで e_n は平均 0 かつ分散 σ^2 の i.i.d. 正規分布に従う。図 6 に比 M/N に対する観測ノイズ存在下での推定回転数の平均誤差を示す。データサイズ N は固定しているため、比は最大時間差 M に依存する。誤差のオーダーに注目するため、平均誤差 $\bar{\varepsilon}$ は誤差の幾何平均によって計算される。

回転数は $\omega \approx 1 - 1/\phi$ とする、ここで ϕ は黄金比である。黄金比は $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1 + [1, 1, 1, \dots]$ であるため、 q_k の増加は最もゆるやかである。従って、 N に対して最も多くコンバージェントが存在するため、図 6 のノイズのない場合 ($\sigma = 0$) に見られるように、 M に対して ε はなだらかに減少する。

他方、距離の平均過程 (式 (38)) において、和の回数は M に対して減少する。この時、大きな M に対して観測ノイズによる d_n のバイアスは一定とならないため、誤差 ε は増加する。これは M に対して推定精度とノイズの影響はトレードオフの関係にあることを意味する。従って、図 6 に示すように、ノイズの標準偏差 σ に依存して平均誤差には M に対する最適値が存在する。

5.2 長いサンプリング周期で観測されたりミットサイクルの周期推定

回転数の推定を疎にサンプリングされたりミットサイクルの周期推定に応用する。リミットサイクルは連続時間における周期解である。しかしながら、一定のサンプリング周期 T で観測する時、サンプリング時系列は離散時間の準周期解であるとみなされ得る。リミットサイクルの周期を S とする。回転数は S によって次ように表される：

$$\omega = \frac{T}{S}. \quad (46)$$

ω が無理数である時、サンプリング時系列は準周期的である。

リミットサイクルを観測するために、次のように定義されるレスラーシステムを用いる [15]:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad (47)$$

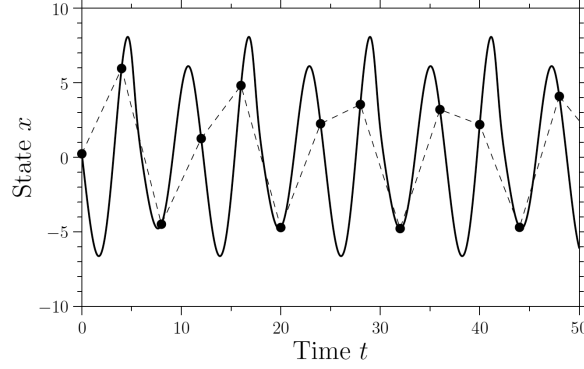


図 7 レスラーシステムのサンプリング周期 T での観測。実線は連続時間における状態 x の時系列を示す。破線は周期 $T=4$ におけるサンプリング点を示す。パラメータは $a=0.2, b=1$ および $c=5.7$ に固定されている。

$$\frac{dy}{dt} = x + ay, \quad (48)$$

$$\frac{dz}{dt} = b + xz - cz, \quad (49)$$

ここで t は連続時間、 (x, y, z) は状態、 (a, b, c) はパラメータである。図 7 にサンプリング周期 $T=4$ での観測の例を示す。連続時系列の周期から見ると、疎なサンプリング周期となっている。微分方程式の計算は Runge-Kutta method を用いた (ステップサイズ $\delta=0.01$)。サンプリング時系列 x_n は状態 x から次のように決定される:

$$x_n = x(nT). \quad (50)$$

サンプリング周期 T は比較的長いことを想定しているため、サンプリング時系列からは元の時系列が直接推測できない。

レスラーシステムのリミットサイクルはしばしば 3.1 節で示したスパイラル構造を持つ。図 8 にレスラーシステムの分岐図を示す。分岐図は状態 x の極大値に対応するポアンカレ断面において計算されている、すなわち、

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{d^2x}{dt^2} \leq 0. \quad (51)$$

図 8 において、周期倍分岐が観測される。1 周期以上の周期解 (図 8(b) および (c)) では、リミットサイクルはスパイラル構造を有する。周期倍分岐に従って、スパイラル構造の巻数が増加する。このタイプの分岐は、準周期解においては double covering 分岐に対応する [9]。

レスラーシステムにおいてリミットサイクルはスパイラル構造を持つため、位相差と距離に不一致が生じる。図9に時間差 n に対する距離 d_n を示す。図8(b)に対応するパラメータを用いている。時系列はサンプリング時系列を用いて以下のように決定される：

$$\mathbf{x}_n = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}). \quad (52)$$

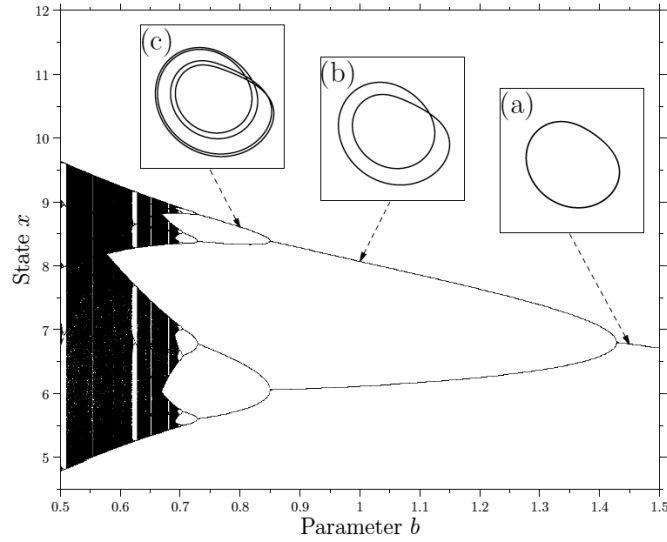


図8 パラメータ b に対するレスラーシステムのポアンカレ断面における分岐図。(a), (b), および (c) はそれぞれ、1 周期 ($b=0.145$)、2 周期 ($b=1$)、および 4 周期 ($b=0.8$) に対応するリミットサイクル (x - y 平面) を示す。他のパラメータは $a=0.2$ および $c=5.7$ に固定されている。

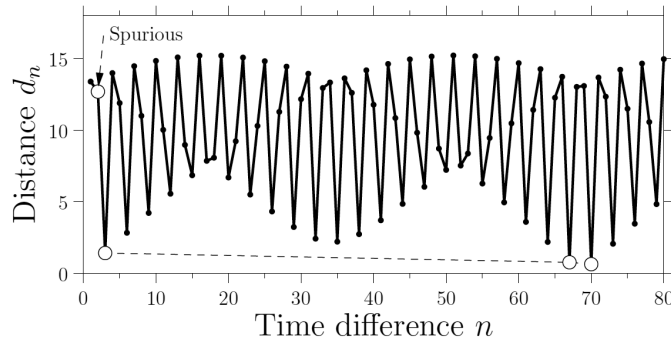


図9 レスラーシステムの時間差 n に対する距離 d_n 。実線は距離 d_n を表す。白い円の破線は式 (23) を満す q を示している ($q=2, 3, 67$, および 70)。距離は $N=10000$ および $M=5000$ において計算されている。パラメータは $a=0.2$, $b=1$ および $c=5.7$ に固定されている。

図9において、白い円は式 (23) を満す q に対応する、すなわち、

$$d_n < d_q \text{ for all } 0 < n < q. \quad (53)$$

$n \leq 80$ において、 $q=2, 3, 67$, および 70 を見付けることができる。もし位相差と距離が一致する場合、 q の系列はコンバージェントの分母に等しいはずである。コンバージェントの分母を見付けるために、 $q=67$ および 70 に対して式 (30) を再帰的に適用する：

$$70 \bmod 67 = 3, \quad 67 \bmod 3 = 1. \quad (54)$$

従って $q=2$ はコンバージェントの分母ではない。これはスパイラル構造の影響によって発生する不一致である。しかしながら、偽の分母 $q=2$ 以上の少なくとも 2 つの q を見つけることができれば、本手法は正しいコンバージェントを推定することができる。

リミットサイクルの周期 S は一般に未知である。しかしながら、回転数は時系列のみから推定できるので、式 (46) によって、サンプリング周期 T および推定回転数から S の推定値 $\hat{S}$ が得られる：

$$\hat{S} = \frac{T}{\hat{\omega}}. \quad (55)$$

しかしながら、アルゴリズムによって $\hat{\omega} < 1/2$ に制限されているため、この推定値は $\omega < 1/2$ である時のみ正しい。リミットサイクルにおいては回転方向は明確に定義されるため、 $1/2$ 以上の ω が必要である。また、離散時間の回転とは異なり、 T は S 以上の値に設定し得るため、 1 以上の ω も可能である。従って可能なすべての推定回転数は次のように表される：

$$\hat{\omega}_m = \begin{cases} m/2 + \hat{\omega} & \text{if } m \text{ is even} \\ (m+1)/2 - \hat{\omega} & \text{if } m \text{ is odd} \end{cases}, \quad (56)$$

ここで $m=0, 1, 2, \dots$ である。この時、推定周期は次のように表される：

$$\hat{S}_m = \frac{T}{\hat{\omega}_m}. \quad (57)$$

それぞれの $\hat{S}_m$ は次の不等式を満たす時、正しい推定値を与える：

$$\frac{m}{2} \leq \frac{T}{S} < \frac{m+1}{2}. \quad (58)$$

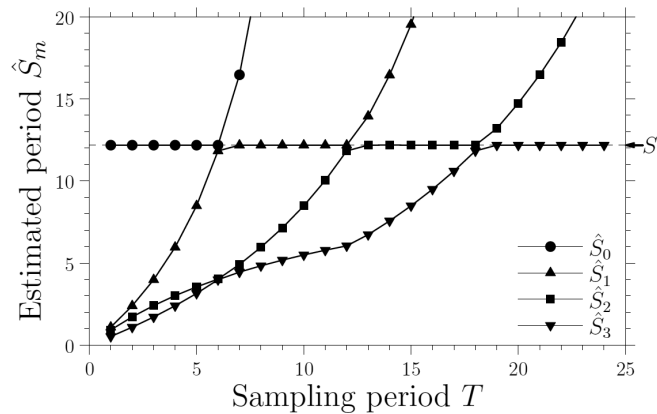


図 10 サンプリング周期 T に対するリミットサイクルの周期の推定値 $\hat{S}_m$ 。真の周期は $S=12.177$ である (破線)。回転数は $N=10000$ および $M=5000$ において推定されている。 $\hat{S}_m$ は式 (58) を満たす領域において正しい推定値を示している。パラメータは $a=0.2, b=1$ および $c=5.7$ に固定されている。

図 10 にサンプリング周期 T に対するリミットサイクルの周期の推定値 $\hat{S}_m$ を示す。真の周期 S は $T = \delta$ (Runge-Kutta method のステップ) において本手法により計算した。それぞれの $\hat{S}_m$ は式 (58) を満す領域において正しい推定値となっている。一般には S は未知であるため、式 (58) の領域を事前に特定することはできない。しかしながら、図 10 に示すように、サンプリング周期 T が可変である時、 T に対して $\hat{S}_m$ が一定となる値を正しい推定値として同定することができる。これはサンプリング周期がリミットサイクルの周期よりも大きい場合においても、リミットサイクルの周期を推定することができることを意味する。

図 7 に示すように、長いサンプリング周期で観測されたサンプリング時系列からは、元の連続時系列を直接推定できない。しかしながら、回転数が得られている時、無理数回転との共役写像を用いて連続時系列を再構成することができる。状態 x に対応する共役写像を h_x とする。この時、 x の 1 周期の連続時系列は次のように表される：

$$h_x(\theta) = x(\hat{S}_m \theta), \quad (59)$$

ここで $0 \leq \theta < 1$ である。 m が既知であると仮定して、推定回転数を用いて無理数回転の時系列を得る：

$$\theta_n = \theta_{n-1} + \hat{\omega}_m \pmod{1}, \quad (60)$$

ここで $\theta_0 = 0$ とする。 θ_n に対する共役写像 h_x はサンプリング時系列 x_n によって次のように表される：

$$x_n = h_x(\theta_n). \quad (61)$$

θ_n ($n=0, 1, \dots, N$) を昇順にソートし次の位相系列を得る：

$$\theta_{(0)}, \theta_{(1)}, \dots, \theta_{(n)}, \theta_{(n+1)}, \dots, \theta_{(N)}, \quad (62)$$

ここで $\theta_{(n)} \leq \theta_{(n+1)}$ である。 N が十分大きい時、 $\theta_{(n+1)} - \theta_{(n)}$ は小さくなる。従って、式 (59) より、次のように微小な時間ステップで状態 x の連続時系列を再構成することができる：

$$x_{(n)} = x(\hat{S}_m \theta_{(n)}). \quad (63)$$

図 11 にサンプリング時系列からの連続時系列の再構成を示す。波形全体としては再構成時系列と元の時系列の差は観測されない。拡大図 (図 11(a)) において、元の時系列に比べ、再構成時系列は階段状になっていることがわかる。推定回転数 $\hat{\omega}_m$ は有理数であるため、同一の位相を有する複数の $\theta_{(n)}$ が存在する。従って、同一時刻 ($\hat{S}_m \theta_{(n)}$) の異なる値を持つ複数の $x_{(n)}$ が存在するため、再構成時系列は階段状となる。しかしながら、ステップの間隔は Runge-Kutta method のステップと比較可能であり、再構成時系列は十分微小な時間間隔を実現している。

6 結論

この論文では、準周期時系列において時間差のあるデータに対する距離から回転数を推定する手法を提案した。回転数を連分数で表し、その有限連分数であるコンバージェントによって推定値として用いている。ある次数以下のすべてのコンバージェントは、最小の距離および次点の距離に対応する 2 つのコンバージェントの分母のみから再構成することができる。この手法により、距離と位相差が一致しない複雑な構造を持つ不変閉曲線に対しても回転数の推定が可能である。

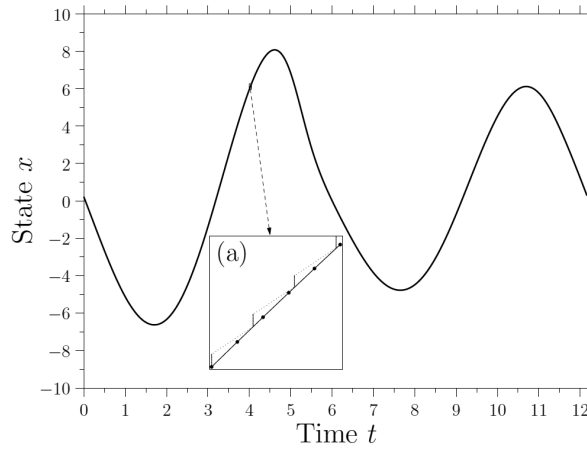


図 11 サンプリング時系列からの連続時系列の再構成。サンプリング時系列は図 7 を用いている ($T=4$)。回転数は $N=10000$ および $M=5000$ において推定されている。(a) 拡大図。実線は連続時系列を示す。ドットは Runge-Kutta method のステップを表す。点線は再構成時系列を示す。パラメータは $a=0.2$, $b=1$ および $c=5.7$ に固定されている。

観測ノイズの存在下においても、十分なデータサイズがあれば、回転数の推定が可能であることを示した。しかしながら、ノイズ低減と推定精度はトレードオフの関係にあり、高いノイズ強度を持つデータに対しては推定精度は減少する。他方、ダイナミカルノイズの存在下では距離に対してノイズの影響は時間差に依存する。従って、本手法はダイナミカルノイズを有するデータに対しては必ずしも適用できない。ダイナミカルノイズ存在下での推定手法は今後の課題である。

本手法を長いサンプリング周期によって観測されたリミットサイクルに応用した。リミットサイクルの周期よりも長いサンプリング周期で観測したとしても、推定回転数からリミットサイクルの周期を推定することができることを示した。また準周期解が無理数回転に位相共役であることを用いて、サンプリング時系列から元の連続時系列が再構成できることを示した。サンプリング周期は一般に対象システムとは独立に設定される。この時、ほとんどの場合で、サンプリング周期とリミットサイクルの周期は互いに不整となる。従っ

て、サンプリングによって観測されたりミットサイクルのほとんどが準周期解であり、本手法は広い適用範囲を有する。

参考文献

- [1] M. Van Veldhuizen. On the numerical approximation of the rotation number. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 21(2):203.212, feb 1988.
- [2] H. Bruin. Numerical determination of the continued fraction expansion of the rotation number. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 59(1-3):158.168, oct 1992.
- [3] R. Pavani. A numerical approximation of the rotation number. *Applied Mathematics and Computation*, 73(2-3):191.201, dec 1995.
- [4] Tere M. Seara and Jordi Villanueva. On the numerical computation of Diophantine rotation numbers of analytic circle maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 217(2):107. 120, may 2006.
- [5] Mitchell J. Feigenbaum, Leo P. Kadano., and Scott J. Shenker. Quasiperiodicity in dissipative systems: A renormalization group analysis. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 5(2-3):370.386, sep 1982.
- [6] Floris Takens. Detecting strange attractors in turbulence. In *Lecture Notes in Mathematics*, pages 366.381. Springer Berlin Heidelberg, 1981.
- [7] Tim Sauer, James A. Yorke, and Martin Casdagli. Embedology. *Journal of Statistical Physics*, 65(3-4):579.616, nov 1991.
- [8] A. Khinchin. *Continued fractions*. Dover Publications, 1964.
- [9] Motomasa Komuro, Kyohei Kamiyama, Tetsuro Endo, and Kazuyuki Aihara. Quasi-periodic bifurcations of higher-dimensional tori. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 26(7), jun 2016.
- [10] Natsuhiro Ichinose and Motomasa Komuro. Multiple delayed feedback control of discrete-time quasi-periodic orbits. *IFAC-PapersOnLine*, 48(18):211.214, jan 2015.
- [11] Arnaud Denjoy. Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 11:333.376, 1932.
- [12] R. S. Mackay. A simple proof of Denjoy’s theorem. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 103(2):299.303, 1988.
- [13] Natsuhiro Ichinose, Yoshihiko Horio, and Masahiro Ogawa. Statistical test of quasiperiodicity in the presence of dynamical noise. *Nonlinear Theory and Its Applications, IEICE*, 9(2):231.242, 2018.

- [14] Scott J. Shenker. Scaling behavior in a map of a circle onto itself: Empirical results. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 5(2-3):405.411, sep 1982.
- [15] O. E. Rössler. An equation for continuous chaos. *Physics Letters A*, 57(5):397.398, jul 1976.

(2026 年 1 月 27 日 受付)