

関数指導に関する日本とシンガポールのカリキュラム・教科書の比較研究

坂井 武 司
(教育学科教授)

赤 井 秀 行
(九州ルーテル学院大学)

石 坂 広 樹
(鳴門教育大学)

本研究では、日本とシンガポールの関数指導に焦点を当て、算数科・数学科のカリキュラムにおける関数指導の目的と内容、教科書における関数指導の具体的な比較を行った。比較・考察の結果、「①パターンに関する学習内容を系統的に位置付けた第1学年～第3学年における関数の基礎の必要性、②比例関係を用いた問題解決の図と比例の学習における表を関連付けた小学校の関数指導の必要性、③比例と反比例の関係性を位置付けた中学校の関数指導の必要性」に関する示唆を得た。

キーワード：関数指導，カリキュラム比較，教科書比較，シンガポール

1. はじめに

(1) 「関数」指導の必要性

現代は「VUCA」(不安定，不確実，複雑，曖昧)が急速に進展する世界に直面している。2015年に始動した OECD Future of Education and Skills 2030(OECD Education 2030)は、フェーズ1(2015年～2018年)の成果として、図1に示す「OECD ラーニング・コンパス 2030」を2019年に公表した。

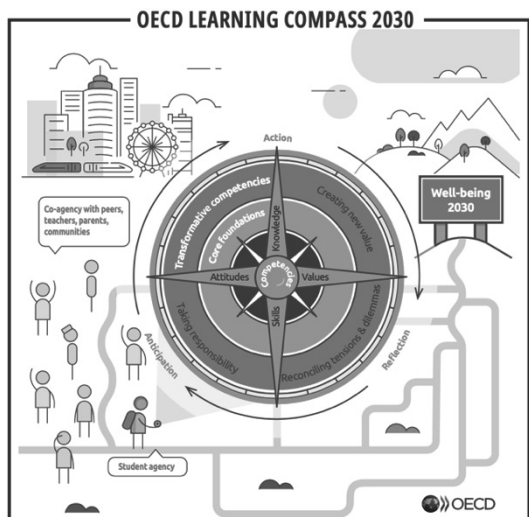


図1. OECD ラーニング・コンパス 2030
(OECD, 2019)

ラーニング・コンパス(OECD, 2019)の構成要素として、カリキュラム全体を通して学習するために必要となる基礎的な条件や主要な知識、スキル、態度及び価値を指す「学びの中核的な基盤」、その基盤をもとに育成される「変革を起こすコンピテンシー」、さらに、「AAR(見通し・行動・振り返り)サイクル」が位置づいている。この学びの中核的な基盤に、2030年に必要とされる主要な知識、スキル、態度及び価値として、読み書き能力、ニューメラシー(数学活用能力・数学的リテラシー)、デジタル・リテラシー(デジタル機器・機能活用能力)、データ・リテラシー(データ活用・解析能力)が含まれている。

VUCAが急速に進展する世界においては、ビッグデータから得られた結果に基づき、一歩先を予測することは不可欠である。このような予測には、上述のニューメラシーに含まれる関数モデルを用いた数学的モデリング能力が必要であり、この能力はデジタル・リテラシーやデータ・リテラシーとも関連する。したがって、関数モデルを用いた数学的モデリング能力を育成することにつながる関数指導は、2030年の未来を生き抜く児童・生徒の育成として重要であり、その育成を担う算数科・数学科の果たす役割は大きい。

(2) 本研究の目的

日本とシンガポールは共に、PISA や TIMSS の成績上位国である。日本では、フェーズ 1 の期間中の 2017 年に学習指導要領が小・中学校共に改定された。一方、シンガポールでは、フェーズ 1 終了後の 2020 年に、中学校の Mathematics Syllabus Secondary One to Four (Ministry of Education Singapore, 2019) が改訂され、2021 年には小学校の Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2020) が改定された。これらのカリキュラム改定に、少なからず OECD Education 2030 が影響しており、目指す算数・数学教育の方向性は一致していると考えられる。これまでに、日本とシンガポールの算数・数学教育カリキュラムに関する全般的な比較研究(坂井・赤井・石坂, 2022)はなされている。

そこで、日本とシンガポールの関数指導に焦点を当て、算数科・数学科のカリキュラムにおける関数指導の目的と内容、教科書における関数指導の具体の比較を行い、日本の関数指導への示唆を得ることを本研究の目的とする。

2. カリキュラムにおける関数指導の目的

(1) シンガポールの Mathematics Syllabus

Mathematics Syllabus Secondary One to Four (Ministry of Education Singapore, 2019) と Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2020) に共通して、数学的对象(Mathematical Objects)との関わりにおいて繰り返される以下の 4 つの数学のテーマが設定され、図 2 のように位置付けられている。

- ① 性質と関係(Properties and Relationships)
- ② 操作とアルゴリズム(Operations and Algorithms)
- ③ 表現とコミュニケーション(Representations and Communications)
- ④ 抽象化と応用(Abstractions and Applications)

特に、「抽象化と応用」に関して、「抽象的な数学的对象、性質、演算、関係、表現を用いることにより、現実世界の現象のモデル化と研究

が可能になる」という数学的モデリングにつながる意義が示されている。しかし、カリキュラム上では、数学的モデリングが指導されるのは中学校数学科である。算数科では、「現実社会の問題を数学的に定式化し、問題の文脈の中で答えの妥当性をチェックする」ことが重視されている。これらは、中学校数学科での数学的モデリングを支える重要なスキルと習慣であると考えられている。

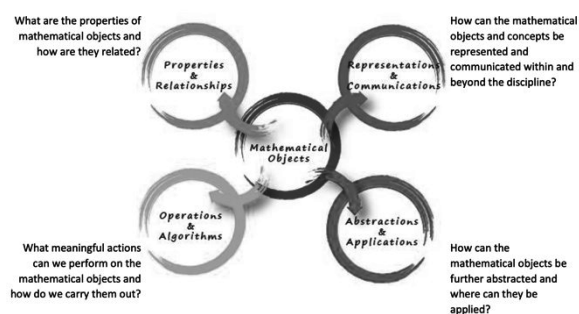


図 2. 数学のテーマ

(Ministry of Education Singapore, 2019)

また、「数と代数(Number and Algebra)」「測定と幾何(Measurement and Geometry)」「統計(Statistics)」という 3 つの内容領域と 4 つの数学のテーマを関連させるビッグアイデアが、Mathematics Syllabus Secondary One to Four (Ministry of Education Singapore, 2019) と Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2020) にそれぞれ例示されている。ビッグアイデアは、「数学の中心となるアイデアを表現しており、異なるトピック、領域、レベルを超えて一貫性をもたらし、つながりを示す」ものとして位置付けられている。

小学校算数科における「関数」に関連するビッグアイデアの例に、比例性に関するビッグアイデアがある。比例という関数関係に関して、「両者の比が同じになるように変化する 2 つの量が存在する」という比例概念の前提が示されており、「2 つの数量の関係において、乗法的な推論に基づき、一方の数量から他方の数量を計

算することができるもの」という比例性に関するビッグアイデアの価値も示されている。

中学校数学科における「関数」に関連するビッグアイデアに、関数についてのビッグアイデア、モデルに関するビッグアイデア、比例性に関するビッグアイデアの3つがある。関数についてのビッグアイデアにおいて、「関数とは、2つの集合の間の関係であり、一方の集合の各要素が、ある規則や操作にしたがって、他方の集合の要素を、どのように一意に決定するかを表すもの」という関数の一対一対応の意味が示されている。また、「関数関係は表、式、グラフ等の様々な方法で表現され得る」という表現の多様性についても示されている。特に、「関数は数学に広汎性を有しており、数学の応用の多くと現実世界の現象のモデリングの基礎をなしている」と、数学的モデリングにおける関数についてのビッグアイデアの価値に言及している点は重要である。

モデルに関するビッグアイデアにおいて、「モデルとは、現実世界の状況や現象を数学的な対象や表現を使って抽象化したもの」という数学的モデリングの意味が示されている。具体的には、現実世界の現象は関数モデル、現実世界の物体は幾何学モデル化、ランダムな現象は確率分布モデルで表され、「現実世界の問題の近似、単純化、理想化として、モデルには仮定と限界があり、これらのモデルから導かれる数学的解答は検証される必要がある」と、数学的モデリングの過程についても示されている。

比例性に関するビッグアイデアでは、算数科での内容に加え、「比例関係は、幾何学において、相似や尺度などの重要な概念の基礎となり、統計学において、円グラフやヒストグラムのような多くの統計的な図の構成・解釈の基礎となる」という比例関係の汎用性について例示されている。

(2) 日本の学習指導要領

小学校学習指導要領解説算数編(文部科学省、

2018a)及び中学校学習指導要領解説数学編(文部科学省、2018b)では、数学的活動と数学的な見方・考え方が数学における重要なテーマとして設定されている。具体的には、数学的活動として、数学的な表現を用いて説明し伝え合う活動や、日常生活や社会の事象及び数学の事象について問題発見・解決する活動が含まれ、数学的活動を通じた数学のよさへの気付きや実感の必要性が示されている。また、数学的な見方・考え方として、数学の対象の性質や関係に着目し、統合的・発展的に考察することの重要性が強調されている。

小学校算数科・中学校数学科に共通して問題発見・解決を通じた学習過程のイメージが示されており、主体的・対話的で深い学びを通して、それぞれの過程を振り返り、評価・改善する数学的活動は、数学的モデリングの過程につながる活動である。特に、中学校数学科では、「事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付ける」(文部科学省、2018b)という数学的モデリングに関する技能が目標に明示されている。

小学校算数科における「関数」に関連する数学的な見方・考え方として、「身の回りの事象の変化における数量間の関係を把握して、それを問題解決に生かす」(文部科学省、2018a)ための関数の考えが示されており、関数の考えによって、伴って変わる二つの数量を見だし、それらの関係に着目し、変化や対応の特徴や傾向を考察できるようにすることが重視されている。また、関数の考えのよさとして、以下の2点が示されている。

- ・二つの数量の間の対応関係に気付き、それを用いることによって、複雑な問題場面をより単純な数量関係に置き換えて考察し、より効率的かつ経済的に作業を行える。
- ・身の回りの事象を理想化・単純化して、数学的に処理したり、問題場面の構造をより簡潔・明瞭・的確に捉えて問題を発展的に考察したりすることを可能にする。

このような関数の考えを働かせ、二つの数量の関係を考察したり、変化と対応から事象を考

察したりする数学的活動を重視する内容が「変化と関係」領域に位置づけられている。この領域の内容は、中学校数学の「関数」領域につながるものであり、小・中学校の学習の円滑な接続が意図されている。しかし、関数の考えは「変化と関係」領域だけでなく、「数と計算」「図形」「測定」「データの活用」という全ての領域の内容を理解したり、活用したりする際に用いられるという関数の考えの汎用性について言及している点は重要である。

中学校数学科においては、「関数」を学ぶ意義が示されている。関数は、「動的な対象を考察する際に用いられる抽象的な概念」であり、「現実の世界の事象における二つの数量の関係を捉えることができれば、その関係が成り立つ範囲において、変化や対応の様子を把握したり、将来を予測したりすることが可能になる」(文部科学省, 2018b)と示されており、これは関数モデルを用いた数学的モデリングの実用性と捉えることができる。

また、目に見えない関数関係を捉えるために、表、式、グラフという数学的な表現を用いたり、相互に関連付けて考察したりすることの必要性が示されている。現実世界における数量関係を数学の世界で考察する際に求められる数学的な見方・考え方と数学的な表現の関係性に言及している点は重要である。

(3) 関数指導の目的に関するカリキュラム比較

上述のカリキュラムにおいて、ポイントとなる以下のキーワードについて比較を行う。

- ① 関数モデルによる数学的モデリング
- ② ビッグアイデアと関数の考え
- ③ 関数の意味
- ④ 関数関係と数学的な表現

「関数モデルによる数学的モデリング」に関して、日本とシンガポール共に、数学的モデリングについての記載があり、その重要性の認識は共通している。数学的モデリングの指導は主に中学校数学科から実施することも一致している。しかし、その基礎としての小学校算数科での取り扱いについて、日本では、シンガポ-

ールの「現実社会の問題を数学的に定式化し、問題の文脈の中で答えの妥当性をチェックする」という内容までは踏み込んでいない。また、日本では関数モデルによるモデリングが中心的であるが、シンガポールでは関数モデル、幾何学モデル、確率モデルなどの複数のモデルが想定されている点は異なる。これは、活用重視型のシンガポールの数学教育の特徴である。

「ビッグアイデアと関数の考え」に関して、シンガポールの比例性に関するビッグアイデアと日本の関数の考えが類似していると考えられる。シンガポールでは、比例性に関するビッグアイデアが小・中学校共に例示されていることから、一貫して重要なビッグアイデアとして位置づけられている。日本でも、関数の考えが小学校算数科における「変化と関係」領域と中学校数学科の「関数」領域の学習をつなぐ重要な考えとして位置づけられている点は共通している。また、日本とシンガポール共に、これらのビッグアイデアと考えが、関数を扱う領域だけでなく、図形やデータを扱う領域など、算数科・数学科のあらゆる領域に活用されるという認識は一致している。

「関数の意味」に関して、シンガポールのカリキュラムでは、一方の集合の要素(x)を入力に、他方の要素(y)を出力に対応させ、その関係付けにおける規則として関数が定義される。一方、日本のカリキュラムでは、小学校算数科において変化の関係に基づき、中学校数学科において対応の関係に基づき関数が定義される。高等学校数学科では、関数概念の理解を深める意味から記号 $f(x)$ を使用することにより、規則として関数が捉え直される(赤井, 中村, 坂井, 2022)。その意味において、日本とシンガポールの関数の捉え方は、各学校段階で異なっている。これは、「関数(function)」の学習が中学校からスタートするシンガポールと、関数関係を扱う「変化と関係」領域が、小学校第4学年から設定されている日本とのカリキュラムの違いに起因する。また、シンガポールでは、Secondaryの第1学年・第2学年が中学校、第3学年・第4学年が高等学校となっており、日本よりもコン

パクトに関数概念を形成する指導が必要であることも関係していると考えられる。

「関数関係と数学的な表現」に関して、日本とシンガポール共に、表、式、グラフ等の数学的な表現により関数関係を捉えたり表したりできるという表現の多様性の認識は共通している。しかし、日本では、様々に表現されるからこそ、それらの表現を相互に関連付けて考察することの必要性が強調されている点は異なる。これは、統合的・発展的な考察を重視する日本の特徴である。

3. カリキュラムにおける関数指導の内容

(1) 日本とシンガポールの関数指導の内容

カリキュラムにおける関数指導の内容を比較するにあたり、シンガポールは Mathematics Syllabus に示された学習内容、日本は学習指導要領に示された学習内容、いわゆる Learning Outcomes を共通の比較対象とする。シンガポールの Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2020) には、2023年2月現在、第3学年の学習内容までしか公開されていないため、小学校第1学年～第6学年については、Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2012) に示された学習内容をもとに、日本の小学校学習指導要領 (文部科学省, 2017a) に示された学習内容と比較する。小学校における「関数」に関連する内容として、比例や反比例だけでなく、パターン、比例的推論、比、文字式も含まれる。なお、Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2020) において、表1に示した第1学年～第3学年の学習内容に追加・削減された内容はない。

シンガポールでは、Secondary の第1学年・第2学年が中学校に該当するため、シンガポールの Mathematics Syllabus Secondary One to Four (Ministry of Education Singapore, 2019) に示された中学校第1学年・第2学年の学習内容をもとに、日本の中学校学習指導要領 (文部科学省, 2017b) に示された中学校第1学年～第3

学年の学習内容と比較とする。以下の表1・表2に、小学校におけるシンガポールと日本の「関数」に関する学習内容を示し、表3・表4に、中学校におけるシンガポールと日本の「関数」に関する学習内容を示す。

表1. シンガポールの「関数」の学習内容(小学校)

学年	学習内容
1	【Number up to 100】 1.6 Patterns in number sequences ・ Describe a given number pattern using language such as '1 more/less' or '10 more/less' before continuing the pattern or finding the missing number(s).
2	【Number up to 1000】 1.5 Patterns in number sequences ・ Describe a given number pattern before continuing the pattern or finding the missing number(s).
3	【Number up to 10 000】 1.5 Patterns in number sequences ・ Describe a given number pattern before continuing the pattern or finding the missing number(s).
4	【Number up to 100 000】 1.4 Patterns in number sequences. ・ Describe a given number pattern before continuing the pattern or finding the missing number(s).
5	【Rate】 1.3 Solving word problems involving rate. ・ Solve problems using proportional reasoning.
6	【Algebra】 1.1 Using a letter to present an unknown number. 1.2 Notation, representations and interpretation of simple algebraic expressions such as $a \pm 3$, $a \times 3$ or $3a$

	<p>and $a \div 3$ or $a/3$</p> <p>【Pie charts】</p> <p>1.3 Solving 1-step problems using data from tables/graphs.</p> <ul style="list-style-type: none"> Use the concept of proportionality to interpret data presented pie charts in terms of percentages or fractions.
--	--

	<p>6.5. The gradient of a linear graph as the ratio of the vertical change to the horizontal change (positive and negative gradients)</p>
2	<p>【Functions and graphs】</p> <p>6.6. quadratic functions $y=ax^2+bx+c$</p> <p>6.7. graphs of quadratic functions and their properties:</p> <ul style="list-style-type: none"> positive or negative coefficient of x^2 maximum and minimum points symmetry

表 2. 日本の「関数」の学習内容(小学校)

学年	学習内容
1	該当なし
2	該当なし
3	<p>【数量の関係を表す式】</p> <ul style="list-style-type: none"> □を用いた式
4	<p>【数量の関係を表す式】</p> <ul style="list-style-type: none"> □, 三角などを用いた式 <p>【伴って変わる二つの数量】</p> <ul style="list-style-type: none"> 変化の様子と表や式, 折れ線グラフ
5	<p>【数量の関係を表す式】</p> <ul style="list-style-type: none"> 数量の関係を表す式 <p>【伴って変わる二つの数量】</p> <ul style="list-style-type: none"> 簡単な場合の比例の関係
6	<p>【文字を用いた式】</p> <ul style="list-style-type: none"> 文字を用いた式 <p>【比例】</p> <ul style="list-style-type: none"> 比例の関係の意味や性質 比例の関係をういた問題解決の方法 反比例の関係 <p>【比】</p> <ul style="list-style-type: none"> 比

表 4. 日本の「関数」の学習内容(中学校)

学年	学習内容
1	<p>【比例, 反比例】</p> <ul style="list-style-type: none"> 関数関係の意味 比例, 反比例 座標の意味 比例, 反比例の表, 式, グラフ
2	<p>【一次関数】</p> <ul style="list-style-type: none"> 事象と一次関数 二元一次方程式と関数 一次関数の表, 式, グラフ
3	<p>【関数$y=ax^2$】</p> <ul style="list-style-type: none"> 事象と関数$y=ax^2$ いろいろな事象と関数 関数$y=ax^2$の表, 式, グラフ

表 3. シンガポールの「関数」の学習内容(中学校)

学年	学習内容
1	<p>【Functions and graphs】</p> <p>6.1. Cartesian coordinates in two dimensions</p> <p>6.2. Graph of a set of ordered pairs as a representation of a relationship between two variables</p> <p>6.3. Linear functions $y=ax+b$</p> <p>6.4. Graphs of linear functions</p>

(2) 関数指導の内容に関するカリキュラム比較

① 小学校算数科における関数指導の内容

小学校の学習内容に関して、文字の使用や比例関係を用いた問題解決は、日本とシンガポールに共通して位置付けられている。しかし、シンガポールでは、第6学年において文字を用いた式が導入されるのに対して、日本では、第3学年から文字の代わりとなる□や△の記号を用いた式が導入されている点が異なる。日本の第3学年で用いられる□は未知数としての役割であり、第4学年から変数として□や△が用いられる。したがって、日本では、文字への抵抗感をなくし、文字の多様な意味理解につながるように、記号から文字、未知数から変数へ段階

的に学習内容が導入されていると考えられる。

また、シンガポールでは、比例・反比例の学習内容が小学校のカリキュラムに位置づいていない。一方、日本では、第5学年から比例の学習内容が位置づけられ、第6学年では反比例についても学習内容に含まれる。第5学年では、2倍・3倍という整数倍の比例関係に基づいた簡単な場合の比例であり、比例に関する表・式を取り扱う。第6学年では分数倍も含め、正の数の範囲に限定した比例・反比例であり、比例・反比例に関する表・式・グラフを取り扱う。日本では、簡単な場合から一般的な場合へと、スパイラルな学習内容の配列を重視していることが関係していると考えられる。

さらに、シンガポールでは、第1学年からパターンに関する学習内容が位置づけられている。シンガポールの幼児教育カリキュラムである“Nurturing Early Learners -A Curriculum Framework for Preschool Education in Singapore” (Ministry of Education Singapore, 2022)にも、「子供たちがパターンを作り、身の回りのパターンを識別することで、パターンの理解や様々なパターンへの認識を深めることができる。これらは、小学校で空間と数のパターンと関係の理解を支援するための初期のステップである。」と、パターンの認識を育成する重要性が示されている。パターンの認識により、数、量、図形におけるきまり(規則性)に着目することは、小学校での関数指導における「変化や対応」のきまり(規則性)に着目することにつながると考えられる。しかし、日本の幼稚園教育要領には、パターンに関する記載は見られず、小学校の全学年を通して、カリキュラム上はパターンに関する学習内容が位置づいていない。数学教育における21のビッグアイデア(Charles, 2005)の一つに「パターン」が位置づいており、小・中学校のカリキュラムにビッグアイデアの記載のあるシンガポールにおいて、幼小接続の観点からもパターンの認識が重視されていると考えられる。

② 中学校数学科における関数指導の内容

シンガポールでは、第1学年に一次関数、第2学年に二次関数の学習内容が位置づけられている。カリキュラム上は、比例・反比例の位置づけを読み取ることができない。一方、日本では、第1学年に比例・反比例、第2学年に一次関数、第3学年に二次関数の特殊な場合である $y=ax^2$ の学習内容が位置づけられており、指導順序・内容に関してシンガポールと異なる。日本の小学校第6学年の比例の学習内容は正の数の範囲に限定されているが、中学校第1学年で負の数まで拡張される。また、第2学年で一次関数を学習する際に、比例は原点を通る一次関数の特殊な場合として捉え直される。同様に、高等学校数学科で二次関数を学習する際に、 $y=ax^2$ は頂点が原点となる二次関数の特殊な場合として捉え直される。このように、日本のカリキュラムにおいては、「特殊」から「一般」という配列順序が意識されていると考えられる。

なお、日本とシンガポールともに、学習内容として、関数モデルによる数学的モデリングの記載はない。数学的モデリングは問題解決の方法であるため、学習内容として位置づいていないと考えられる。しかし、日本では、小学校算数科の「データの活用」領域に、PPDACサイクルに基づく統計的な問題解決の方法が方法知として示されている。したがって、内容領域に応じて、関数モデル、幾何学モデル、確率分布モデル等にモデルを変更することにより、汎用的に活用できる問題解決の方法として、数学的モデリングを中学校数学科の学習内容に位置づけることも重要であると考えられる。

4. 教科書における関数指導の具体

(1) 小学校算数科の教科書比較

上述のカリキュラム比較において、小学校算数科における関数指導の内容のポイントとなった以下のキーワードについて、関数指導の具体としての教科書比較を行う。

- ① パターンの指導
- ② 比例関係を用いた問題解決の指導
- ③ 文字を用いた式の指導

なお、シンガポールの小学校算数科の教科書

は、2023年2月現在、第3学年までしか刊行されていないため、第4学年以降の教科書比較には、Mathematics Syllabus Primary One to Six (Ministry of Education Singapore, 2012) に準拠した算数科の教科書を用いる。

パターンに関する学習内容は、日本のカリキュラムに位置づいていないが、教科書レベルにおいては、図3のような数列としてのパターンが、第1学年と第2学年の全ての教科書で取り扱われており、図4のように、図形に関するパターンも一部の教科書で取り扱われている。一方、カリキュラムに Number Patterns の記載があるシンガポールでも、図5・図6のように、日本と同様の数列としてのパターンと図形に関するパターンが、第2学年の教科書に掲載されている。しかし、図形に関するパターンは、日本の場合、トピック的な扱いであるが、シンガポールでは、「Shapes」の単元の中に位置づけられている。

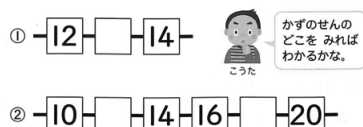


図3. 日本の数列としてのパターンの事例
 (『あたらしいさんすう 1②』東京書籍：藤井，2020，p. 43)

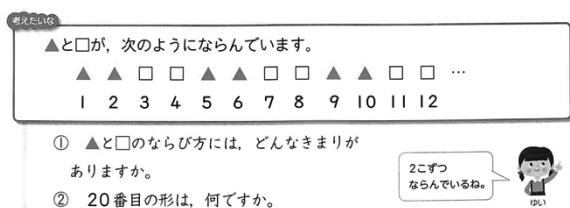


図4. 日本の図形に関するパターンの事例
 (『みんなと学ぶ小学校算数 3年上』学校図書：一松，2020，p. 58)

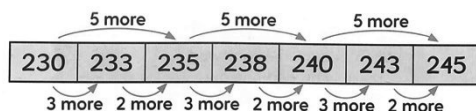


図5. シンガポールのパターンの事例
 (Primary Mathematics Textbook 2A, Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education Singapore, 2022, p. 21)

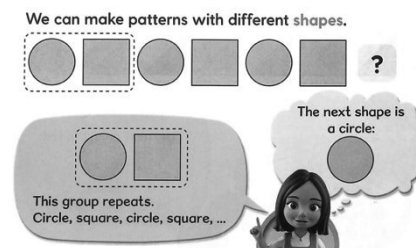


図6. シンガポールのパターンの事例
 (Primary Mathematics Textbook 2B, Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education Singapore, 2022, p. 103)

比例関係を用いた問題解決に関する学習内容は、日本とシンガポールに共通して位置付けられおり、図7に示す日本の数直線図や関係表(ボックス図)と図8に示すシンガポールの関係図のように、教科書に記載された図は異なるが、比例関係を表した同じ構造的をもつ図である。しかし、比例とのつながりについての取り扱いは異なる。

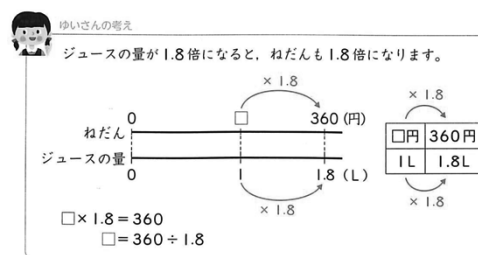


図7. 日本の比例関係を捉える図
 (『みんなと学ぶ小学校算数 5年上』学校図書：一松，2020，p. 81)

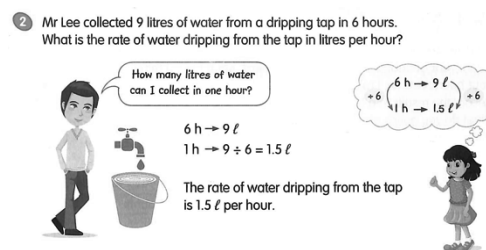


図8. シンガポールの比例関係を捉える図
 (Targeting Mathematics 5B, Chan and Kaur, 2017, p. 35)

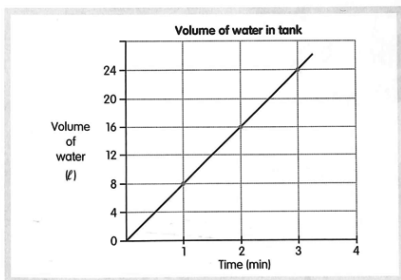
シンガポールでは、第5学年の「Rate」の単元において比例関係を用いた問題解決が取り扱われており、その際、「Direct Proportion」と

いう用語は用いないが、図 9 に示すように、比例関係を捉えるために、比例のグラフが取り扱われている。これは、シンガポールの小学校のカリキュラムに、比例の学習内容が位置づいていないことへの配慮と考えられる。

比例のグラフに関して、日本でも、第 5 学年の「小数のかけ算・わり算」「単位量当たりの大きさ」「割合」において、比例関係を用いた問題解決が取り扱われているが、比例のグラフと関連づけた学習内容はなく、比例のグラフは、第 6 学年の「比例・反比例」の単元に限定されている。比例の表に関して、日本の一部の教科書では、図 10 のように、比例を学習する前の第 4 学年において、表における比例関係の捉え方と数直線図における比例関係の捉え方を関連付ける内容が取り扱われ、図 11 のように、第 5 学年においても、簡単な場合の比例を学習した後で、表を用いた問題解決の方法と数直線図を用いた問題解決の方法を関連付ける内容が取り扱われる教科書がある。

文字を用いた式に関する学習内容は、日本とシンガポールに共通して取り扱われているが、シンガポールでは、教科書レベルにおいても、日本のように、□や△の記号を用いた式の学習内容はなく、一方、日本では、「 x 」や「 y 」という文字は、第 6 学年の比例・反比例の学習において、 $y = \boxed{\text{きまった数}} \times x$ 、 $y = \boxed{\text{きまった数}} \div x$ という表現として限定的に使用されており、「 \times 」の記号を省略する表記については、中学校で取り扱われる。

③ The line graph shows the volume of water flowing into a rectangular tank at 1-minute intervals when a tap is turned on.



What is the rate of water flowing into the tank in litres per minute?

図 9. 「Rate」の単元におけるグラフ

(Targeting Mathematics 5B, Chan and Kaur, 2017, p. 37)

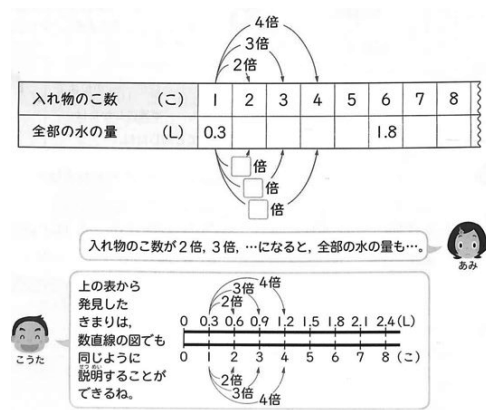


図 10. 第 4 学年における表と図の関連
(『新しい算数 4 下』東京書籍：藤井，2020，p. 88)

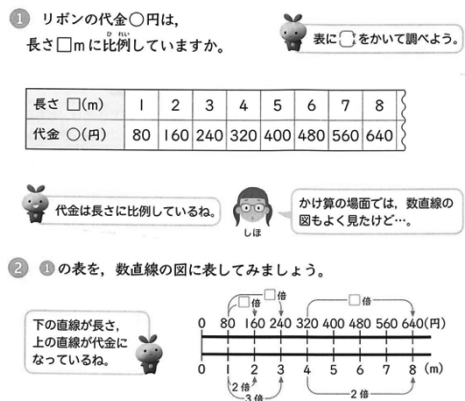


図 11. 第 5 学年における表と図の関連
(『新しい算数 5 上』東京書籍：藤井，2020，p. 36)

(2) 中学校数学科の教科書比較

中学校数科における関数指導の内容のポイントとなった以下のキーワードについて、関数指導の具体としての教科書比較を行う。

- ① 比例・反比例・一次関数・二次関数の指導
- ② 関数モデルによる数学的モデリング

比例・反比例・一次関数・二次関数の学習内容に関して、シンガポールでは、Primary の教科書レベルにおいても、比例・反比例の学習内容はなく、Secondary の第 1 学年における一次関数($y = ax + b$)の学習の中で、比例($y = ax$)は、原点を通る一次関数の特殊な場合($b = 0$)、つまり、一次関数の一例として取り扱われている。

また、カリキュラムでは読み取ることはできないが、教科書レベルにおいては、「一次関数→二次関数→反比例」という順で学習内容が配列されている。二次関数の学習では、二次方程式

に続き、二次関数のグラフの導入として、 $y = ax^2$ のグラフが、わずか1ページで取り扱われており、日本のように、 $y = ax^2$ だけで一単元を構成していない。学習の中心は二次関数($y = ax^2 + bx + c$)である。したがって、日本では、「特殊」から「一般」へと指導し、後から、その特殊性を捉え直すという指導方法であるが、シンガポールでは、「一般」に重点を置いた指導方法となっている。

また、二次関数の学習の最後に設定された、「Other forms of direct proportion」という小単元において反比例が取り扱われている。この小単元では、図12のように、 $y = ax^2$ において「 y は x^2 に比例する」と同様に、図13のように、「 y は $1/x$ に比例する」という比例の特殊な場合として、反比例が導入されている。日本の教科書では、「 y が x^2 に比例する」という記載はあるが、「 y は $1/x$ に比例する」という記載はない。そのため、日本では、比例と反比例を連続して学習するにもかかわらず、式の表現もグラフの形も全く異なるため、その関係性について理解している生徒は少ないと考えられる。

関数モデルによる数学的モデリングに関して、日本では、比例、一次関数、 $y = ax^2$ の単元において、図14のように、日常の事象を既習の関数と見なして問題解決する内容が取り上げられている。シンガポールも同様に、図15のように教科書レベルでは、数学的モデリングが取り扱われている。

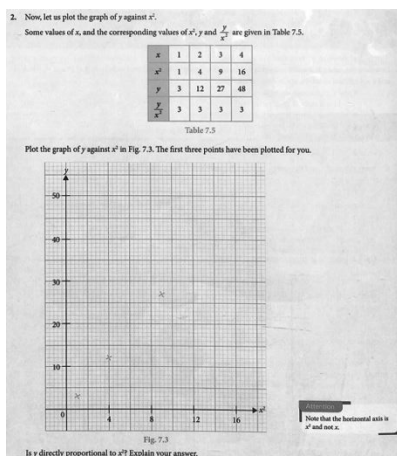


図12. 「 y は x^2 に比例する」事例

(think! MATHEMATICS 2A, Har et al, 2021, p. 166)

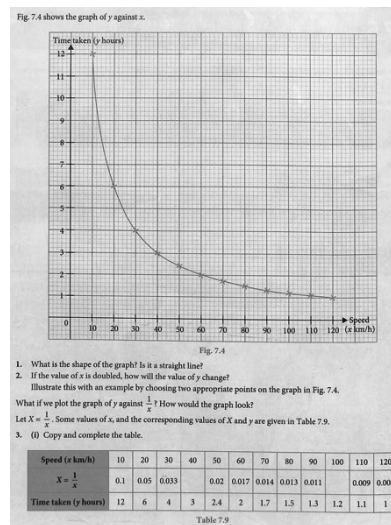


図13. 「 y は $1/x$ に比例する」事例

(think! MATHEMATICS 2A, Har et al, 2021, p. 174)

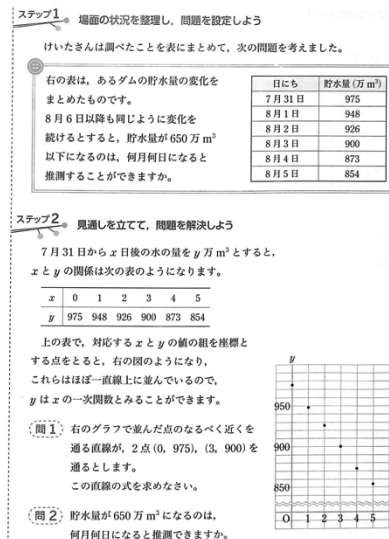


図14. 日本のモデリング教材

(『未来へひろがる数学2』啓林館：岡本，2021，p. 85)

Many real-world objects and phenomena can be modelled using quadratic functions. For example, do you know that the path of a basketball as it travels through the air follows the shape of a quadratic curve? There are many ways to model the path of the basketball by superimposing a coordinate system. In Fig. 5.5, we can see that the path of the basketball can be modelled by superimposing a coordinate system, with x being the time in seconds after the ball was released and y being the height of ball in metres above the point of release.

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
y	0.012	0.357	0.552	0.597	0.492	0.237	-0.168

図15. シンガポールのモデリング教材

(think! MATHEMATICS 2A, Har et al, 2021, p. 122)

5. 日本の関数指導への示唆

(1) 小学校における関数の基礎に関する示唆

日本では、第1学年と第2学年の教科書に、

数列としてのパターンに関する学習内容が取り扱われているが、関数指導における「変化や対応」のきまり(規則性)に着目することにつながる基礎として、「変化と関係」領域が設定される以前の第1学年～第3学年に、パターンに関する学習内容を系統的に位置付ける必要がある。特に、「数と計算」領域に限定することなく、「図形」領域・「測定」領域におけるパターンも取り入れていくことが重要である。図的なパターンの中に数的な要素を発見することは、関数の基礎として重要な意味を持つと考えられる。例えば、「図形」領域に関して、第1学年では「箱のような形(角柱)・筒のような形(円柱)・ボールのような形(球)」や、「さんかく・まる・しかく」に見立てた身の回りのものの形を用いたパターンが考えられる。第2学年では「三角形・四角形」や「長方形・正方形」、第3学年では「正三角形・二等辺三角形・直角三角形」を用いたパターンが考えられる。「測定」領域に関して、第1学年では「長い・短い」「太い・細い」「広い・狭い」等の観点から、身の回りのものを用いたパターン、第2学年では「12時、3時、6時、9時」のような3時間ごとの時計を用いたパターンが考えられる。

(2) 小学校における関数指導への示唆

比例関係を用いた問題解決と関連させて比例を学習できるという意味において、日本のように、小学校で比例を扱う意味があると考えられる。しかし、表の読み取りにおいて、2量の関係を加法的に捉えるにとどまり、乗法的な比例の関係として捉えることに困難さのある児童も少なくない。そのため、図11のように比例の表の読み取りと別授業で、数直線図と表の関係を扱うのではなく、比例の表の読み取りに困難を示す児童への支援の方略として数直線図を提示し、比例の表と数直線図の関連に着目させることが考えられる。児童はこれまでの小数のかけ算等の学習において、数直線図を用い、「一方が○倍になると、他方も○倍になる」という関係を捉えている。そのため、比例の表における特徴の読み取りと数直線図を関連付

けることで、乗法的な関係を捉えるための数学的な見方・考え方を働かせやすくなると考えられる。

(3) 中学校における関数指導への示唆

シンガポールでは、小学校算数科における比例・反比例に関する学習内容がなく、Secondaryの第1学年・第2学年の中学校数学科において、日本の高等学校数学Iで学習する二次関数($y = ax^2 + bx + c$)までを取り扱うため、関数指導に関して、かなり過密なカリキュラムとなっている。その意味では、小学校高学年から比例・反比例を導入し、中学校でのスパイラルな学習と、「特殊」から「一般」という順序で、一次関数へと発展させる日本の関数指導は大切にすべきである。しかし、比例と反比例の関係性については、シンガポールの「Other forms of direct proportion」の小単元のように、明確な指導を位置付ける必要がある。第3学年において、「 y が x^2 に比例する」という比例と $y = ax^2$ の関係性が取り扱われることを考慮すると、対応関係により比例と反比例が定義される第1学年において、「 y は $1/x$ に比例する」という比例と反比例の関係性を取り扱うことが妥当であると考えられる。

6. おわりに

本研究では、日本とシンガポールの関数指導に焦点を当て、算数科・数学科のカリキュラムにおける関数指導の目的と内容、教科書における関数指導の具体の比較を行った。比較・考察の結果、以下の3つの観点について示唆を得た。

- ① 関数の基礎として、第1学年～第3学年に、パターンに関する学習内容を系統的に位置付ける必要がある。
- ② 小学校における関数指導として、比例関係を用いた問題解決の図と比例の学習における表を関連付ける支援が必要である。
- ③ 中学校における関数指導として、比例と反比例の関係性についての明確な指導を位置付ける必要がある。

日本の関数指導は、簡単な場合や特殊な場合

から一般へと，系統的かつスパイラルに学習内容が配列されているよさがある。このよさを活かしつつ，既存の学習内容の統合・発展により，3つの示唆に基づいた教材開発及び授業実践を行うことが今後の課題である。

引用・参考文献

- 赤井秀行，中村真里，坂井武司(2022)：「関数概念の理解を深める授業開発に関する研究—シンガポール数学教科書をもとに—」，『VISIO』，九州ルーテル学院大学，No.53, pp.1-8.
- Charles, R. (2005) : “Big ideas and understandings as the foundation for elementary and middle school mathematics”, *Journal of Mathematics Education Leadership*, Vol.7, No.3, 9-21.
- Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education Singapore (2022) : *Primary Mathematics Textbook 2A*, Star Publishing Pte Ltd, p.21.
- Curriculum Planning & Development Division Ministry of Education Singapore (2022) : *Primary Mathematics Textbook 2B*, Star Publishing Pte Ltd, p.103.
- Chan, C. M. E. and Kaur, B. (2017) : *Targeting Mathematics 5B*, Star Publishing Pte Ltd, p.35, p.37.
- 藤井齊亮 他 85 名(2020)：『あたしいさんすう 1②』，東京書籍，p.43.
- 藤井齊亮 他 85 名(2020)：『新しい算数 4 下』，東京書籍，p.88.
- 藤井齊亮 他 85 名(2020)：『新しい算数 5 上』，東京書籍，p.36.
- 一松信 他 62 名(2020)：『みんなと学ぶ小学校算数 3 年上』，学校図書，p.58.
- 一松信 他 62 名(2020)：『みんなと学ぶ小学校算数 5 年上』，学校図書，p.81.
- Ministry of Education Singapore(2012) : Mathematics Syllabus Primary One to Six, https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/mathematics_syllabus_primary_1_to_6.pdf.
- Ministry of Education Singapore(2019) : Mathematics Syllabus Secondary One to Four, https://www.moe.gov.sg/-/media/files/secondary/syllabuses/maths/2020-express_na-maths_syllabuses.ashx.
- Ministry of Education Singapore(2020) :

Mathematics Syllabus Primary One to Six, <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/syllabus/2021-pri-mathematics-1-to-3.pdf>.

Ministry of Education Singapore(2022): Nurturing Early Learners -A Curriculum Framework for Preschool Education in Singapore, https://www.nel.moe.edu.sg/qql/slot/u143/2022/Nurturing%20Early%20Learners%20Framework%202022_final.pdf.

文部科学省(2017a)：『小学校学習指導要領』，東洋館出版社。

文部科学省(2017b)：『中学校学習指導要領』，東山書房。

文部科学省(2018a)：『小学校学習指導要領解説算数編』，日本文教出版。

文部科学省(2018b)：『中学校学習指導要領解説数学編』，日本文教出版。

OECD(2019) : OECD Future of Education and Skills 2030 Conceptual learning framework LEARNING COMPASS 2030, https://www.oecd.org/education/2030-project/teaching-and-learning/learning/learning-compass-2030/OECD_Learning_Compass_2030_concept_note.pdf.

岡本和夫 他 131 名(2021)：『未来へひろがる数学 2』，啓林館，p.85.

坂井武司・赤井秀行・石坂広樹(2022)：「日本とシンガポールの算数・数学教育カリキュラムの比較研究—シンガポールの改訂 Mathematics Syllabus をもとに—」，『京都女子大学教職支援センター紀要』，京都女子大学教職支援センター，第 5 号，pp.1-12.

Har, Y. B., Yeo, J. B. W., Choy, B. H., Lee, S., Seng, T. K., Wong, L. F., and Wong-Ng, S. H. (2021) : *think! MATHEMATICS 2A*, Shinglee Publishers Pte Ltd, p.122, p.166, p.174.

付記

本研究は，JSPE 科研費「23K02421」の助成および京都女子大学令和 5 年度「研究経費助成」の助成を受けた研究成果である。