

算数教育におけるシンガポールの 問題解決型学習過程に関する研究

坂井 武 司
(教育学科准教授)

赤井 秀 行
(堺市立竹城台小学校教諭)

石坂 広 樹
(鳴門教育大学准教授)

1. はじめに

(1) 研究の背景

算数・数学に関する国際学力調査においてシンガポールは常に上位の成績である。TIMSS2015では小学校算数・中学校数学共に1位, また, PISA2015においても, 数学的リテラシーで1位である。このように, 国際的な学力調査において, シンガポールは優秀な成績を残している。PISA2009の結果に関して, 黒田恭史 (2012) は, 「かつての受験型学力をベースとした高得点ではなく, 現実場面への活用力においても高い能力が育成されていることを示している」と評価している。これは, 問題解決を中心に据えた算数・数学教育の成果であるといえる。

一方, 日本では, 平成32年度から全面实施される小学校学習指導要領 (文部科学省, 2017) 及び中学校学習指導要領 (文部科学省, 2017) が, 平成29年3月に公示された。授業のあり方として, 主体的な学び・対話的な学び・深い学びという3つの視点が重視されている。算数科・数学科においては, 問題解決を通して統合的・発展的に考えることに重点が置かれ, また, そのような問題解決の過程を振り返ることの重要性が強調されている。

このように, 日本とシンガポールの両国において, 問題解決を中心とした算数・数学教育のあり方が重要視されている。

(2) シンガポールの算数・数学教育

Ministry of Education Singapore (MOE) は, 算数科・数学科のシラバス (MOE, 2012) において, 「①数学概念及び技能の獲得及び活用」,

「②問題解決への数学的アプローチを通じた認知・メタ認知能力の育成」, 「③数学に対する積極的態度の育成」の3点を目標として掲げている。また, 問題解決を通して, これらの目標を達成するために, 小学校から高等学校までのすべての段階において, 図1のような算数・数学教育の枠組みを示している。

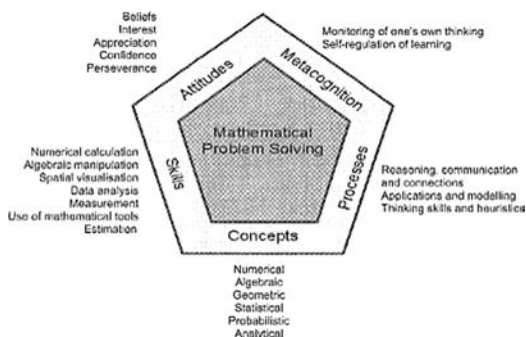


図1 算数・数学教育の枠組み

この算数・数学教育の枠組みでは, 数学的問題解決を中心として, 相互に関連し合う「概念」, 「スキル」, 「プロセス」, 「態度」, 「メタ認知」の5つの項目が示されている。5つの項目には, それぞれ表1に示す下位項目があり, 2006年のカリキュラム改訂において修正が加えられたが, 2012年のカリキュラム改訂では変更されていない。この下位項目の内, 確率, 解析, 数値計算, 空間的可視化, データ分析, 測定, 推論・コミュニケーション・関係, 応用・モデル化, 信念, 学習の自己調整が, 2006年のカリキュラム改訂において追加・修正された項目である。この修正について, Soh, C. K. (2008) は「グローバル化や知識スキルの重視に対応し,

算数・数学教育の枠組みにおけるコミュニケーションや関連付けの重要性をより強調したものである」と指摘している。

表1 下位項目

	下位項目
概念	数, 代数, 幾何, 統計, 確率, 解析
スキル	数値計算, 代数操作, 空間的可視化, データ分析, 測定, 数学的ツールの使用, 推定
プロセス	推論・コミュニケーション・関係, 思考スキル・発見的方法, 応用・モデル化
態度	信念, 興味関心, 評価, 自信, 忍耐力
メタ認知	自らの思考のモニタリング, 学習の自己調整

(3) シンガポールの算数・数学教育についての研究動向

シンガポールの算数・数学教育について, 黒田恭史 (2012) は, 「数と計算」領域における教科書やカリキュラム, 評価システムの分析を行っている。分析の結果, 「数と計算」領域のカリキュラムの特徴として, 暗算や概算による「解答の妥当性」や「解答にいたるまでの論理的な厳密性」を検証する能力の育成を重視していることを明らかにしている。また, 児童生徒個人の成績の経年変化に基づいた教育目標の設定や教育改善に重点が置かれているという評価システムの特徴を指摘している。清水美憲 (2009) はシンガポールの算数・数学カリキュラムの分析から, 日本の教育課程編成においても, 数学のプロセスに関する学年間・学校種間の接続のあり方を議論する必要性を示唆している。また, 赤井秀行・坂井武司 (2017) は, シンガポールの算数・数学の授業構造の特徴について分析を行い, 授業の導入部分において, 積極的に ICT を活用する工夫がなされていること, また, 児童間対話的な活動に基づいた学び合いの場面があまり見られないことを指摘している。しかし, 図1の算数・数学教育の枠組みの中心に据えられた数学的問題解決に関する実際の授業における位置付けや, その指導方法

についての研究は十分に行われていない。

(4) 本研究の目的

図1に示した算数・数学教育の枠組みに基づくシンガポールの算数科の授業は, 問題発見・解決の過程を重視する日本にとって, 多くの示唆を含んでいると考えられる。そこで, 本研究では, シンガポールの算数科の授業について, 問題解決過程という観点から考察することにより, その特徴を明らかにするとともに, 日本の算数教育への示唆を得ることを目的とする。

2. 問題解決型学習過程

(1) シンガポールの問題解決モデル

シンガポールの算数・数学教育における問題解決モデルは, 「①問題を理解すること」, 「②計画を立てること (発見の手続きを選ぶこと)」, 「③計画を実行すること」, 「④計画を修正もしくは新しくすることが必要か」, 「⑤確認すること: 解答は意味が通っているか, 合理的か」, 「⑥振り返ること: 用いた方法を改善し, 他の解法がないか探求し, 別の問題にその方法を応用すること」の6つの過程から構成されている (OECD, 2015)。この過程は, 数学の世界にお

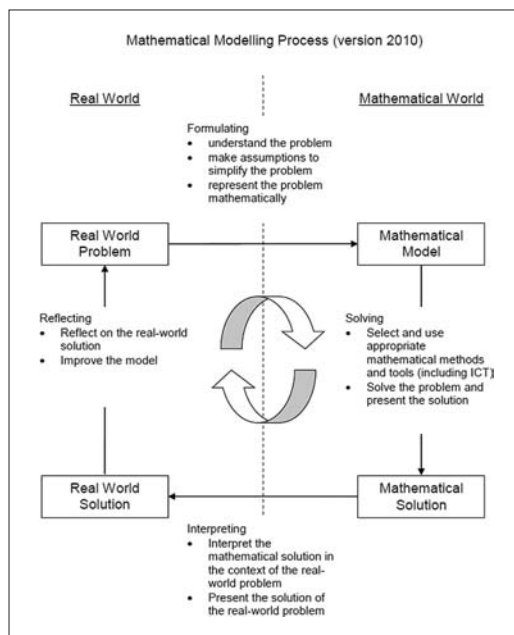


図2 数学的モデリング過程

スのプロセス2に示された「問題の適切な数学的表現を明らかにする」、「問題解決のために、手順やツールを含む適切な数学的概念や技能を用いる」、「問題の文脈において数学的解答を解釈し、結果を意味づける」と同様の考え方に基づくと考えられる。また、「現実の世界」における過程と「数学の世界」における過程が相互に関わり合って展開する点は、シンガポールの数学的プロセスのプロセス1に示された「数学における、または、数学と日常生活の間における関係付けを行う」と同じことを意味すると考えられる。

さらに、日本の小学校学習指導要領（文部科学省，2017）及び中学校学習指導要領（文部科学省，2017）では、「深い学び」を実現する過程において、「数学的な見方・考え方」を働かせることの重要性が強調されている。「数学的な見方」を働かせるとは、「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念に着目してその特徴や本質を捉える」ことであり、「数学的な考え方」を働かせるとは、「目的に応じて図、数、式、表、グラフなどを活用し、根拠を基に筋道立てて考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能などを関連付けながら統合的・発展的に考える」ことである。

(3) 数学的な見方・考え方と問題解決ストラテジー

図1におけるメタ認知の項目では、問題解決において、ストラテジーの選択・使用に関する自己の思考過程を振り返る能力を重要視している。片桐重男（1988）は、「数学的な考え方に非常に近い概念としてストラテジー、特に問題解決におけるストラテジーがある」と考えている。そこで、シンガポールにおけるストラテジーと日本の学習指導要領解説算数編（文部科学省，2017）における「数学的な見方・考え方」との対応を表3に示す。

このように、日本の「数学的な見方・考え方」は、シンガポールにおけるストラテジーと重なる部分が多く見られる。日本の小学校学習指導要領（文部科学省，2017）及び中学校学習指導要領（文部科学省，2017）のもとでは、

表3 ストラテジーと数学的な見方・考え方の対応

シンガポール	日本
適切な表記、 きまり、記号	式による表現の考え方 記号による表現の考え方
パターン	きまりを発見する見方 関数の考え
類似性・違い	類推的な考え方
分類する	集合の考え方
比較する	比較する見方 単位の考え方
配列する	順序よく並べる考え方
一般化する	一般化の考え方
帰納的に考える	帰納的な考え方
演繹的に考える	演繹的な考え方
分析する	発展的な考え方
統合する	統合的な考え方
図をかく	図による表現の考え方
表にする	表による表現の考え方
試行錯誤	試行錯誤の考え方
逆向きに考える	逆演算の考え方
問題を単純化する	単純化の考え方
特定の場合について考える	特殊な場合の考え方

「数学的な見方・考え方」を働かせて問題解決するとともに、問題解決過程において、どのような「数学的な見方・考え方」をどのように働かせたのかについて振り返ることが求められている。この点は、シンガポールにおいても、メタ認知の育成のため、問題解決過程において、ストラテジーをどのように選択・使用したかに関する自らの思考過程を振り返ることが重視されていることと同様である。したがって、ストラテジーやメタ認知を問題解決過程に位置付けているシンガポールの算数科の授業は、「数学的な見方・考え方」を重視する日本にとって、非常に多くの示唆を含むものである。

3. 調査の概要

(1) 対象校

2017年8月1日～4日にかけて、シンガポールの小学校を訪問し、授業観察・記録及び意見交流を行った。授業観察を行った小学校は、公立の男子校である Montfort Primary School と公立の共学校である Temasek Primary School である。両校とも、学力はシンガポールで中位程度に位置する。

(2) 観察した授業と教材の概要

観察した授業の学年と実施単元を表4に示す。全ての授業は、1単位時間を30分とする2単位時間の授業であった。シンガポールでは、能力別クラス編成が行われており、授業1と授業2は、標準的な能力の児童が在籍するクラス、授業3は、能力の低い児童が在籍するクラスで実施された。

表4 観察授業の概要

	学校名	学年	単元
1	Montfort Primary	4年	線対称
2	Montfort Primary	2年	分数
3	Temasek Primary	4年	STEMS

授業3の単元STEMSとは、Striving Towards Excellence in Mathematical Skillsの略である。シンガポールでは、1週間の算数科の時数は、第1・2学年が9単位時間、第3・4学年が11単位時間、第5・6学年が10単位時間となっている。Temasek Primary Schoolでは、1週間の算数科の時数の内、2時間をSTEMSの時間にあてている。STEMSでは、学校独自の教材が用いられている。この教材は、図4のように見開き2ページに4問が配置され、2単位時間の授業内容を構成している。

図4における①は教師による問題解決のデモンストレーションを行うための問題、②は教師が児童の自力解決における習熟度を把握するための問題、③は主にペア学習で取り組むための問題である。④は自力解決により学習をまとめるための問題として設定されている。

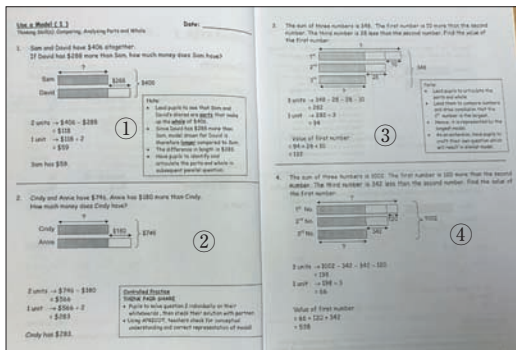


図4 STEMSのテキスト構成

4. 授業の実際

(1) 授業1「線対称」

①本時の目標

線対称な図形を判別することができ、線対称の軸を見つけることができる。

②授業の展開

導入において、「線対称とは何か」という問いに対する数人の児童の答えをもとに、線対称の定義が教師から示された。本時では、線対称は、「Can be divided into equal halves」, 「Each half is the mirror image of the other」と定義されていた。また、数学的な図形だけでなく、図5のような自然に存在する事柄も取り上げて授業は進められた。

次に、ハート型の図形が児童一人ひとりに配



図5 線対称な事例の提示

られ、児童は、それが線対称であるかどうかを確かめる活動を行った。定義を基に検証するに当たり、「2つの等しい部分に折ることができるのか」、「それぞれの半分は、mirror imageになっているのか」、「他に2つの等しい部分に折る方法はあるのか」という確認すべき事柄が教師から示された。児童は提示された事柄を一つずつ確認している様子であった。また、図6のように、長方形や三角形、楕円、平行四辺形などの図形を、線対称か非線対称かに分類するグループワークが行われた。



図6 線対称な図形の分類

児童がそれぞれの図形について線対称かどうかを発表したが、グループワークにおいて、複数の線対称の軸を発見しているグループの考えが取り上げられることはなかった。さらに、教師から「線対称と分かった図形は、それぞれいくつの線対称の軸をもっているだろうか」と発問があり、児童は再びグループワークを行った。

このグループワーク後の全体交流において、教師は長方形の対角線を対象の軸と考えているグループの意見を取り上げた。この点について、授業後の教師へのインタビューでは、教師は、「長方形の対角線を対象の軸として捉えてしまうつまづきは、とても典型的なものである」と認識しており、全体でその誤りを修正する必要があると考え、意図的にそのグループを指名したと答えている。

次にAからZまでのアルファベットやトラップ、蝶などの絵が描かれたワークシートが配布された。児童は、それらが線対称かどうか、対称の軸はいくつあるかを調べるグループワークを行った。単に図形だけでなく、自分達の身

の回りにあるものを題材として扱うことにより、児童は、とても意欲的に活動に取り組んでいた。一方、教具が紙に印刷されていたため、教師が繰り返し強調していた折って重ねることによる検証ができず、児童は、見た目による判断に留まっていた。また、授業の最後に、一人の児童を前に立たせ、「人間は線対称か」と問いかけるなど、数学的な学習内容を、身近な題材に活用しようとする取り組みが続いた。

(2) 授業2「分数」

①本時の目標

単位分数をもとに1を構成する2つの分数を考えることができる。

②授業の展開

導入において、既習事項の確認のため、パワーポイントを用いて、円、長方形、五角形を分割している図が提示され、「色が塗られている部分は、分数でどのように表されるか」との発問に対し、児童はホワイトボードに解答を書いた。ここでは、単位分数から扱い、その後、単位分数のいくつ分という説明を加えながら、 $2/5$ 等の分数が扱われた。次に図7のような1 wholeの図が提示され、その上に $1/2$ や $1/4$ の図が1 wholeになるまで貼り合わせられた。また、1にするために、それぞれの単位分数がいくつ必要かの確認がなされた。



図7 1 wholeの図

この過程で、 $1/8$ を教師が提示したとき、「8つ」と答えた児童に対して、教師は、「どうやって分かったの?」と問い返した。しかし、その児童からそれ以上の考えを引き出すことはせず、他の児童に実際に $1/8$ の図をはらせることにより、8枚必要であることを確認した。

さらに、図8のような模造紙が提示された。「提示された長方形がいくつの部分に分かれているか」との発問により、6つの equal parts に分けられていることが確認された。その後、2つの parts に色が塗られ、「塗られている部分は分数でどのように表せるか」、「塗られていない部分を分数でどのように表せるか」との発問に対して、児童は $2/6$ 、 $4/6$ と答えた。

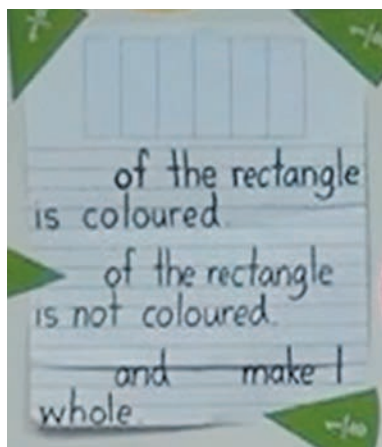


図8 提示された模造紙

次に、「何と何で1になるか」との発問に対して、ある児童が「 $3/6$ と $3/6$ で1になる」と答えたが、教師は、色が塗られている部分とそうでない部分を見るように促し、 $2/6$ と $4/6$ で1となると指導した。教師から、「今日はこのような問題に取り組んでもらいます」と課題が与えられ、自力解決場面へ移った。ここで配られた問題は、「6等分された長方形の2つに色を塗り、色を塗られた部分と塗られていない部分を分数で表し、何と何で1になるかを記入する」というものであった。しかし、正しく問題を解決できていない児童も多く見られた。

続いて、図9のように、児童は2人組になり、等分された円や多角形の図形と模造紙が配られた。教師は、その図形の任意の部分に色を塗り、色を塗った部分と塗られていない部分を分数で表し、何と何で1になるかを記述するよう指示した。多くのグループが、黒板に貼られた例文を見ながら、それを写す様子が見られた。

教師は、解決できたグループの解答を確認し、



図9 2つの分数による1の合成

それを窓際に掲示させ、他のグループの解答を見るように指示した。このような活動が普段から行われているため、図10のように、多くの児童が掲示された他のグループの解答を確認していた。しかし、それらについて全体で練り上げるような場面は見られなかった。



図10 他のグループの解答の確認

最後に、ドリルワークが配布され、児童は個人で取り組んだ。内容は、本時で扱った問題と同様に、色が塗られている部分と塗られていない部分を分数で表し、何と何で1になるかを記述する問題であった。また、全体指導において、「色が塗られている部分の数と、塗られていない部分の数が分子になっている」、「全体をいくつに分けているかが分母になり、塗られている部分と塗られていない部分を分数で表したとき、それぞれの分母は変わっていない」という本時のまとめが教師からなされた。

(3) 授業3「STEMS」

①本時の目標

- Unitary Method を用いて分数の文章題についてのモデルをかくことができる。
- Unitary Approach により分数の文章題を解

くことができる。

②授業の展開

授業の冒頭、以下に示す内容の約2分間のビデオが流された。ビデオの視聴後、Unitary Methodを用いて問題を解くこと、Unitary Methodでは、わり算とかけ算という2つのステップがあることが全体で確認された。

ペンが4本で48Rs。では、6本の代金はいくらになるでしょう。まず、最初に1本あたりの値段を求めます。次に6本分の代金を求めます。

今、4本で48Rsなので、1本分の代金を求めるには、わり算を使います。 $48 \div 4 = 12$ で12Rsになります。1本分の代金が分かったので、6本分の代金を求めるにはかけ算を使います。「1本分の代金 $\times 6$ 」なので、 $12Rs \times 6 = 72Rs$ となり、6本分の代金は72Rsと分かります。

この問題の答えを求めるには2つのステップを使います。1つ目は、「わり算によって一つ分の量を求める」です。2つ目は、「かけ算によって、いくつ分の量を求める」です。これをUnitary Methodといいます。

続いて、児童は、以下の問題1に取り組んだ。教師は、7つに分けられた図が必要であること、また、7つということを知るためには、問題文の分母に注目すればよいことを指導した。この後、教師は書画カメラを用いて、バーモデルをかき、児童はそれを見ているだけであった。「Sallehにあげた部分としていくつ分を塗ればよいか」、「モデルのどの部分が残りの量か」、「残りの部分にあたる5 unitsが表している量はいくらか」についても、教師主導により授業が進められた。また、教師は、常に1 unit分を見つけていることが必要であること、わり算を使ってそれが求められることを指導した。Sallehにあげた部分は2 unitsであるので、かけ算を使って求めることを伝え、式を児童に提示した。さらに、「まずモデルをかくこと」、「1つ分(unit)を求めること」、「答えを求めること」という問題解決の過程を全体で確認した。

[Question 1] Samuel has 15 marbles left after giving $2/7$ of his marbles to sallah. How many marbles did he give to Sallah?

次に、児童は、以下の問題2に取り組んだ。自力解決の後、「最初に何をしますか」、「いくつ分のunitに分けたモデルが必要ですか」、「どこを見れば分かりますか」と問題解決の手順を1つずつ問いながら、解決過程及び答えの確認が行われた。

[Question 2] $3/11$ of the children in an art class wear spectacles. If 48 of them do not wear spectacles, how many children wear spectacles?

さらに、児童は、ペアワークとして、以下の問題3に取り組んだ。自力解決の後にペアワークを行うという形式ではなく、はじめから隣同士の2人で問題3に取り組んだ。問題2と同様に一つ一つの過程を確認しながら、解答の確認が行われた。

[Question 3] Mrs. Foo bought a bottle of orange syrup. She used $1/5$ of syrup to make orange juice. if there were 520 mL left, how much orange syrup did she buy?

最後に、児童は、問題4に個人で取り組んだ。授業を観察したクラスは、能力別において、最も能力の低いクラスということであった。しかし、問題4の場面ではほとんどの児童がモデルを自力でかき、Unitary Methodの手順に沿った問題解決が行われていた。

5. 考察

授業1では、「線対称を判断するメソッド」、授業2では、「2つの分数で1を作るメソッド」、授業3では、「バーモデルをかくメソッド」が、教師のデモンストレーションにより提示された。児童は、それらの方法を用いて問題を解決するという授業の展開が共通して観察された。さらに、全体指導における教師によるデモンストレーション→児童の個人解決→グループ解決→個人のドリルワークという授業の形態も共通していた。この点について、授業3の事後検討会において、シンガポールのベテラン教員から、「このような授業はシンガポールの代表的な授業である」という発言があった。「このような授業」とは、教師が提示したメソッドを、児童

が問題解決の中で活用し、そのメソッドをより発展させる授業を意味する。実際にSTEMSの教科書も、このような授業の展開に即して作られている。しかし、今回の授業観察では、教師がストラテジーを提示し、それを児童が問題解決の中で使用する場面は多く観察され、児童の習熟度も非常に高いものであった。しかし、「問題解決において、どのストラテジーを選ぶのか」という点に関する学習過程は観察されなかった。

このような授業の展開が、振り返りの質にも現れている。授業1及び授業3において、授業の最後に振り返りを付箋に書き、図11のように、教室に掲示するという活動が行われていた。

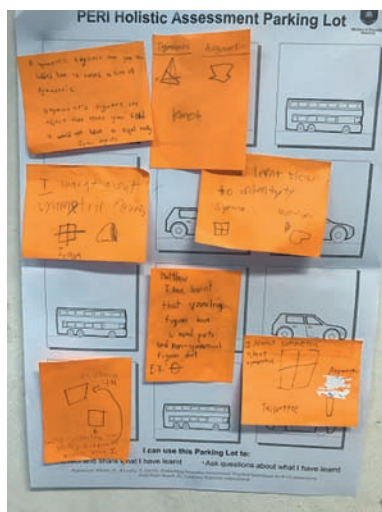


図11 児童の振り返り

この振り返りは、メタ認知の育成のため、児童が自分自身の考えを振り返る機会とするという意図と、教師が評価の対象として活用するという意図がある。しかし、「線対称な図形は2つの同じ部分からできていて、非線対称な図形はそうではない」、「線対称な図形を折る線を対称の軸という」などの知識や技能に関する記述が殆どであり、メソッドの選択・使用に関する記述は、あまり見られなかった。これは、メソッドの正確な使用に関する知識や技能に、授業の焦点が当てられており、メソッドの選択・使用に関する思考に重点が置かれていないため

であると考えられる。

メソッドとストラテジーの関係について、あるやり方(メソッド)が、「2度目もうまくいき、そのやり方をうまく使ったことを思い出し、別の似た問題にそれを使ってみようと考えたとき、そのやり方は、ストラテジーになる」(Schoenfeld, A. H., 1979)と考えられる。したがって、シンガポールの問題解決型学習は、メソッドを技能として習得し、それを何度も使うことにより、ストラテジーとしての定着を図ろうとしていると考えられる。しかし、観察した全ての授業において、「うまく使ったことを思い出す」ことにより、「別の似た問題にしてみようとする」過程が、十分に活動として位置付けられていなかった。そのため、メソッドをストラテジーにまで高めることができず、ストラテジーのよさを認識することができなかったと考えられる。

さらに、赤井秀行・坂井武司(2017)でも明らかになったように、日常の場面や事物を数学的概念の対象として学習に取り入れようという活動は積極的に行われていた。特に、授業1の線対称の学習では、アルファベットなどの文字、蝶、ライオンの写真などの自然界の事物、また、人間自身など、数学的な概念である線対称を、現実世界の文脈において、問題解決に活用しようとする場面が多く見られた。また、授業1で見られたように、あらかじめ児童の典型的なつまづきを考慮した発問を準備していることも伺えた。黒田恭史(2012)は、シンガポールの教員が有している国際的な教育研究成果に関する情報量が、日本の教員に比べて非常に多い点を指摘しており、教材や発問の工夫は、教師の高い専門性に基づいたものであると考えられる。一方、児童の自由な発言をもとに、全体で考えを掘り下げたり、新たな考えを引き出したりする活動は見られなかった。

6. まとめと今後の課題

本研究を通じて、シンガポールの問題解決型学習の特徴であるメソッドの使用に焦点をあてた指導により、その技能を高めることは可能で

あることが明らかになった。しかし、そのような指導だけでは、メソッドをストラテジーにまで高めることができないため、新たな問題に直面したときに、最適なストラテジーの選択・使用ができないと考えられる。そこで、授業では、個人やグループ解決の場面において、メソッドの選択・使用に関する思考を働かせる活動により、メソッドをストラテジーにまで高めるとともに、学び合いの場面において、児童の様々な考え方を統合的・発展的に捉える活動を通して、ストラテジーのよさに迫ることが重要であると考えられる。また、統合的・発展的に見るためには、そのきっかけとなる教師からの発問が必要であるが、発問の質は、教師の教科内容に関する専門性によるところが大きい。日本の小学校学習指導要領（文部科学省，2017）及び中学校学習指導要領（文部科学省，2017）においても、教科に関わらず、「児童生徒が学習や人生において「見方・考え方」を自在に働かせることができるようにすることこそ、教師の専門性が発揮されることが求められる」と示されており、日本の求める教師の質のあり方と合致する。

一方、日本の算数教育において、ストラテジーと近い概念である数学的な見方・考え方のよさに気付く学習活動を重視した場合、シンガポールのメソッドに焦点をあてた学習活動のように、数学的な見方・考え方の使用に関する知識や技能に焦点をあてた学習活動は、時間的に制約される。しかし、そのような学習活動は、数学的な見方・考え方を働かせることに効果があるため、日本の算数教育にも取り入れる必要がある。そこで、シンガポールで用いられているSTEMSのテキストのような教材を、ドリル教材として、家庭学習に活用することにより、数学的な見方・考え方に関する知識や技能を補うことができると考えられる。

今後の課題として、次の2点が考えられる。

- (1) 授業外での学習を通して、数学的な見方・考え方に関する知識や技能を高めるために、ドリル教材を開発すること。
- (2) 数学的な見方・考え方の選択・使用に関する思考力・判断力・表現力を高めるた

めに、数学的な見方・考え方のよさに気付く問題解決型学習モデルを開発すること。

付記

本研究は、京都女子大学平成29年度研究経費助成「算数教育における授業実践に関する国際比較」の助成を受けています。

参考・引用文献

- 赤井秀行・坂井武司, 「シンガポールの算数教育におけるICTの活用と授業構造に関する考察」, 『数学教育学会春季年会予稿集』, 数学教育学会, pp. 110-112, 2017.
- 片桐重男, 『数学的な考え方の具体化』, 明治図書, 1988.
- 黒田恭史, 「シンガポールの「数と計算」の教育における特徴—カリキュラムと評価システムに着目して—」, 『数学教育学会誌』, 数学教育学会, Vol. 52, No. 3・4, pp. 121-130, 2012.
- 清水美憲, 「シンガポール数学教育におけるカリキュラム編成の枠組み」, 『日本科学教育学会年会論文集』, 日本科学教育学会, Vol. 33, pp. 75-76, 2009.
- Ministry of Education Singapore, Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus, 2006.
- Ministry of Education Singapore, Primary Mathematics Teaching and Learning Syllabus, 2012.
- 文部科学省, 『小学校学習指導要領解説』, 〈http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afildfile/2017/05/12/1384661_4_2.pdf〉.
- 文部科学省, 『小学校学習指導要領解説 算数編』, 〈http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afildfile/2017/07/25/1387017_4_1_1.pdf〉.
- 文部科学省, 『中学校学習指導要領解説』, 〈http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afildfile/2017/06/21/1384661_5.pdf〉.
- OECD教育研究革新センター, 『メタ認知の教育学』, 明石図書, 2015.
- Schoenfeld, A. H., "Can heuristics be taught", In Lochhead, J. & Clement, J. (Eds.), *Cognitive Process Instruction*, Philadelphia Pa.: Franklin Institute Press, 1979.
- SOH, C. K., "An overview of mathematic education in Singapore", *Mathematics Curriculum in Pacific Rim Countries-China, Japan, Korea, and Singapore*, pp. 23-36, 2008.